ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Teorema di Rappresentazione di Riesz

Tesi di laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Giulio Pasqualetti

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Alla mia famiglia
ed a Caterina

Indice

Introduzione

Lo spazio duale V^* di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, dove in genere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$, è l'insieme di quei funzionali che "rispettano" la struttura di V. Quando quest'ultimo è uno spazio vettoriale topologico, V^* si definisce come l'insieme dei funzionali lineari da V in $\mathbb{K}$. Se invece V è dotato di una topologia, è interessante esaminare i funzionali che "rispettano" anche quest'ultima: in tal caso V^* consta di tutti i funzionali lineari e continui da V in $\mathbb{K}$. Definendo su di esso le operazioni di somma tra funzionali lineari e di prodotto per scalare, V^* acquisisce una struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale che risulta molto utile in quanto la sua analisi permette di comprendere meglio le caratteristiche e la struttura dello spazio V. In ambito finito questo concetto permette di dare la nozione di tensore senza dover ricorrere a dei sistemi di riferimento, cioè delle basi, e di definire tramite questa un prodotto interno su V. Quando invece si applica tale concetto a spazi di dimensione infinita, esso permette di descrivere misure e distribuzioni su questi definite. Nello studio dello spazio duale interviene l'argomento che è oggetto dell'elaborato: il Teorema di Rappresentazione di Riesz. Diversi risultati sono raggruppati sotto questo nome, che deriva dal matematico ungherese Frigyes Riesz, e tutti permettono di caratterizzare chiaramente gli elementi del duale dello spazio a cui si riferiscono. Scopo della tesi è quello di presentare il teorema nelle sue varie forme a partire da una delle più elementari: quella relativa a spazi vettoriali finiti. Ripercorrendo via via le sue generalizzazioni si arriverà all'enunciato inerente allo spazio $C_0(X)$ delle funzioni continue $f : X \to \mathbb{C}$ che si annullano all'infinito, cioè tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme compatto $K \subseteq X$ tale che $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \notin K$, dove X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Si vedrà inoltre un esempio di applicazione del teorema.

L'elaborato è strutturato come segue.

Nel primo capitolo si presenta il teorema nel caso di spazi vettoriali finiti e nel caso di spazi di Hilbert generici. Tramite quest'ultimo si dimostra poi l'esistenza dell'aggiunto di un operatore lineare continuo.

Nel secondo capitolo vi è una sezione dedicata a dei teoremi preliminari di carattere topologico, tra i quali il Lemma di Urysohn. A seguire viene mostrato il caso dei funzionali lineari positivi su $C_c(X)$, lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

Nel terzo capitolo si presenta il Teorema di Radon-Nikodym e lo si estende tramite la nozione di misura σ-finita. Si tratta poi il caso inerente agli spazi L^p, con $1 \leq p < +\infty$, e viene presentato il teorema per i funzionali lineari continui su $C_c(X)$, con la relativa generalizzazione allo spazio $C_0(X)$.

Nel quarto ed ultimo capitolo viene infine proposto un esempio di applicazione: il Teorema di Lax-Milgram, un risultato che ha molte applicazioni nella teoria delle PDE e nel metodo degli elementi finiti in analisi numerica, la cui dimostrazione fa largo uso del teorema di Riesz.

Capitolo 1

Dimensione finita e Spazi di Hilbert

1.1 Dimensione Finita

In questa sezione daremo enunciato e dimostrazione della versione del teorema che riguarda $\mathbb{C}$-spazi vettoriali di dimensione finita. Supporremo quindi che gli spazi che andremo a considerare abbiano tutti dimensione finita. Iniziamo dando prima alcune definizioni e nozioni preliminari:

Definizione 1.1.1. *Uno spazio vettoriale metrico reale o complesso di dimensione finita è uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, o su $\mathbb{C}$, provvisto di un prodotto scalare, o hermitiano nel caso complesso, $\langle , \rangle$ definito positivo, cioè tale che $\langle v, v\rangle \geq 0$ per ogni $v \in V$ ed è $= 0 \Leftrightarrow v = 0$, sia che si tratti di prodotto scalare che di prodotto hermitiano. La* norma $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}^+$ *in questo spazio vettoriale metrico è definita da*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \, .$$

La norma $\|v\|$ di un vettore v si dice anche lunghezza di v.

Osservazione 1.1.2. *La condizione che abbiamo posto sul prodotto ci servirà poi per poter parlare di base ortonormale.*

Proposizione 1.1.3. *Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali metrici V e W. Allora esiste un'applicazione lineare $T^* : W \to V$ tale che*

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V \, , \qquad \forall v \in V, \forall w \in W, \tag{1.1}$$

dove con $\langle , \rangle_V$ abbiamo indicato il prodotto scalare (o hermitiano) di V, e con $\langle , \rangle_W$ quello di W.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale (è qui che serve che il prodotto sia definito positivo) di V. Supponiamo che T^* esista e proviamone l'unicità:

(Unicità): Per le proprietà delle basi ortonormali abbiamo che

$$\begin{aligned} T^*(w) &= \langle T^*(w), v_1\rangle_V v_1 + \ldots + \langle T^*(w), v_n\rangle_V v_n \\ &= \langle w, T(v_1)\rangle_W v_1 + \ldots + \langle w, T(v_n)\rangle_W v_n. \end{aligned}$$

Quindi se T^* esiste è necessariamente definita da

$$T^*(w) = \sum_{j=1}^{n} \langle w, T(v_j)\rangle_W v_j, \quad \forall w \in W;$$

questo prova l'unicità.
Mostriamo adesso che questa definizione soddisfa le condizioni del teorema:

(Esistenza): Chiaramente T^* è lineare, bisogna vedere se soddisfa la (1.1). Ogni $v \in V$ si scrive come $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle_V v_j$, per cui, supponendo che $\langle , \rangle_W$ sia hermitiano, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w)\rangle_V &= \left\langle v, \sum_{j=1}^{n} \langle w, T(v_j)\rangle_W v_j \right\rangle_V = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle w, T(v_j)\rangle_W} \langle v, v_j\rangle_V \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle w, T(v_j)\rangle_W} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle_V v_i, v_j \right\rangle_V \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle T(v_j), w\rangle_W \langle v, v_i\rangle_V \langle v_i, v_j\rangle_V \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle T(v_j), w\rangle_W \langle v, v_j\rangle_V = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \langle v, v_j\rangle_V T(v_j), w\right\rangle_W \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle_V T(v_j), w \right\rangle_W = \left\langle T\left(\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle_V v_j \right), w \right\rangle_W \\ &= \langle T(v), w\rangle_W . \end{aligned}$$

Nel caso in cui $\langle , \rangle_W$ sia reale i precedenti passaggi sono analoghi. Ciò conclude la dimostrazione. □

Definizione 1.1.4. *L'applicazione $T^* : W \to V$ così definita si dice aggiunta di T e la formula* (1.1) *si dice formula di aggiunzione.*

Possiamo adesso dare l'enunciato del teorema di rappresentazione.

Teorema 1.1.5. *Sia V uno spazio vettoriale metrico su $\mathbb{C}$ e $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare. Allora esiste un unico $v_\varphi \in V$ tale che $\forall v \in V$ vale*

$$\varphi(v) = \langle v, v_\varphi \rangle .$$

Dimostrazione.

(Unicità): Supponiamo che esistano due vettori v_φ e v'_φ tali che valga

$$\varphi(v) = \langle v, v_\varphi \rangle = \left\langle v, v'_\varphi \right\rangle , \quad \forall v \in V.$$

Ciò vuol dire che $\left\langle v, v_\varphi - v'_\varphi \right\rangle = 0$, $\forall v \in V$ e quindi $v_\varphi - v'_\varphi \in V^\perp$ che però è costituito dal solo vettore nullo perché, secondo la definizione di spazio vettoriale metrico, $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo e quindi è non degenere, cioè $V^\perp = \{0\}$.
Allora $v_\varphi - v'_\varphi = 0$, cioè $v_\varphi = v'_\varphi$, quindi esiste al più un vettore v_φ che soddisfa la tesi.

(Esistenza): Poniamo su $\mathbb{C}$ il prodotto hermitiano canonico dato da

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \bar{\mu}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Allora possiamo considerare l'aggiunta φ^* di φ e porre $v_\varphi := \varphi^*(1)$. Sostituendo si ottiene

$$\langle v, v_\varphi \rangle = \langle v, \varphi^*(1) \rangle = \langle \varphi(v), 1 \rangle_{\mathbb{C}} = \varphi(v) \langle 1, 1 \rangle_{\mathbb{C}} = \varphi(v),$$

cioè $\varphi(v) = \langle v, v_\varphi \rangle$.

□

1.2 Spazi di Hilbert

Passiamo ora ad una versione un po' più generale del teorema, che riguarda ancora spazi dotati di prodotto scalare, ma che non necessariamente hanno dimensione finita: gli spazi di Hilbert.

Definizione 1.2.1. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale H su $\mathbb{R}$, o su $\mathbb{C}$, dotato di un prodotto scalare (o hermitiano) $\langle , \rangle$ tale che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto, ovvero quella definita da*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \forall v \in H.$$

Osservazione 1.2.2. *Uno spazio vettoriale metrico finito dimensionale è sempre uno spazio di Hilbert.*

Definizione 1.2.3. *Data una trasformazione lineare $T : H_1 \to H_2$ tra spazi di Hilbert, muniti delle norme $\|\cdot\|_{H_1}$ e $\|\cdot\|_{H_2}$ rispettivamente, la sua norma è definita come*

$$\|T\| = \|T\|_{H_1 \to H_2} := \sup_{\substack{f \in H_1 \\ \|f\| \leq 1}} \|Tf\|_{H_2}.$$

Osservazione 1.2.4. *Quando si parla di funzionale su uno spazio di Hilbert, si intende in genere una trasformazione L che va da uno spazio di Hilbert H ad $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), quindi in tal caso abbiamo*

$$\|L\| = \sup_{\substack{f \in H \\ \|f\| \leq 1}} |L(f)|.$$

Proposizione 1.2.5. *Siano V e W due spazi vettoriali metrici, con norme $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_W$ rispettivamente, e $T : V \to W$ un operatore lineare, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *T è continuo;*

(2) *T è continuo in $0 \in V$;*

(3) *T è limitato.*

Dimostrazione.

(1)⇒(2): Se T è continuo, allora per definizione lo è in tutti i punti, 0 compreso.

(2)⇒(3): T continuo in $0 \in V$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste un $\delta > 0$ tale che se $x \in V$ ha norma minore di δ allora $\|Tx\|_W < \varepsilon$. Fissiamo dunque $\varepsilon_1 = 1 > 0$, allora esiste un $\delta_1 > 0$ che soddisfa la proprietà precedente. Sia ora $x \in V$, fissiamo $r > 0$ e consideriamo $\tilde{y} := \frac{\delta_1 x}{\|x\|_V + r}$. Si ha che $\|\tilde{y}\|_V < \delta_1$. Infatti

$$\|\frac{\delta_1 x}{\|x\|_V + r}\|_V = \delta_1 \frac{\|x\|_V}{\|x\|_V + r} < \delta_1 .$$

Ma allora $\|T\tilde{y}\|_W < 1$, ovvero $\|T\left(\frac{\delta_1 x}{\|x\|_V + r}\right)\|_W < 1$, da cui

$$\|Tx\|_W < \frac{\|x\|_V + r}{\delta_1}, \quad \forall x \in V.$$

Poiché ciò vale per ogni $r > 0$, passando all'estremo inferiore, otteniamo

$$\|Tx\|_W < \frac{1}{\delta}\|x\|_V, \quad \forall x \in V.$$

(3)⇒(1): Per definizione esiste una costante $L > 0$ tale che $\|Tx\|_W < L\|x\|_V$, $\forall x \in V$. Siano $x, y \in V$ generici, allora

$$\|Tx - Ty\|_W = \|T(x-y)\|_W < L\|x-y\|_V \ .$$

Questo vuol dire che T è lipschitziano e quindi continuo.

□

Teorema 1.2.6.
Sia L un funzionale lineare continuo su uno spazio di Hilbert H. Allora esiste un'unica $g \in H$ tale che:

$$L(f) = \langle f, g \rangle, \quad \forall f \in H,$$

ed inoltre

$$\|L\| = \|g\|_H.$$

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio di H definito come

$$S = \{f \in H \mid L(f) = 0\} = \mathrm{Ker}L,$$

che, essendo L continuo, è chiuso. Procederemo adesso in questo modo: se $S = H$ allora $L \equiv 0$ e basta prendere $g = 0$, altrimenti $S^\perp$ è non banale e quindi esiste una $h \in S^\perp$ tale che $\|h\| = 1$ (perché sappiamo che esiste una $v \in S^\perp \setminus \{0\}$, perciò $\frac{v}{\|v\|}$ ha norma 1 e per linearità di L appartiene ad $S^\perp$). A questo punto definiamo $g := \overline{L(h)}h$ e, preso un generico $f \in H$, considero

$$u = L(f)\,h - L(h)\,f \in H,$$

e noto che $L(u) = L(f)\,L(h) - L(h)\,L(f) = 0$.
Quindi $u \in S$ e , per come abbiamo scelto h,

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, h \rangle &= \langle L(f)\,h - L(h)\,f, h \rangle \\ &= L(f)\langle h, h \rangle - \left\langle f, \overline{L(h)}h \right\rangle \\ &= L(f)\|h\|^2 - \langle f, g \rangle, \ \forall f \in H, \end{aligned}$$

cioè

$$L(f) = \langle f, g \rangle, \quad \forall f \in H.$$

Rimane ancora da dimostrare la seconda parte della tesi, cioè l'uguaglianza della norma di L con quella di g:

Sappiamo già che $g = 0$ se e soltanto se $L \equiv 0$, nel qual caso il risultato è immediato. Supponiamo quindi che sia $g \neq 0$:

(≤): Siccome

$$\|L\| = \sup_{\substack{f\in H\\ \|f\|_H\leq 1}} |L(f)| = \sup_{\substack{f\in H\\ \|f\|_H\leq 1}} |\langle f, g\rangle|,$$

dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$ e dunque $|\langle f, g\rangle| \leq \|g\|$ per ogni f di norma ≤ 1. Ciò prova che $\|L\| \leq \|g\|_H$.

(≥): Ora, avendo supposto $g \neq 0$, posso considerare $H \ni \tilde{g} = g/\|g\|_H$, che ha norma 1, per cui $\|g\|_H = |\langle \tilde{g}, g\rangle| \leq \|L\|$.

□

1.3 Aggiunti

La prima applicazione del teorema di rappresentazione di Riesz è la determinazione dell'esistenza dell'*aggiunto* di una trasformazione lineare di uno spazio di Hilbert in sé.

Proposizione 1.3.1. *Sia $T : H \to H$ una trasformazione lineare limitata dove H è uno spazio di Hilbert. Allora esiste un'unica trasformazione lineare T^* su H tale che:*

1. $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$, $\forall f, g \in H$;
2. $\|T\| = \|T^*\|$;
3. $(T^*)^* = T$;

Definizione 1.3.2. *L'operatore lineare $T^* : H \to H$ che soddisfa tali condizioni è chiamato* aggiunto *di T.*

Per dimostrare la proposizione avremo bisogno di un lemma:

Lemma 1.3.3. *Data una trasformazione lineare $T : H_1 \to H_2$ tra due spazi di Hilbert, si ha che:*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tf, g\rangle_{H_2}| \mid \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Chiamiamo G il secondo membro dell'uguaglianza.

(≥): Prendiamo $f \in H_1$, $g \in H_2$ di norma ≤ 1. Allora per la Cauchy-Schwarz $|\langle Tf, g\rangle| \leq \|Tf\|\|g\| \leq \|Tf\|$. Quindi abbiamo $|\langle Tf, g\rangle| \leq \|T\|$, passando all'estremo superiore sulle f e g di norma ≤ 1 otteniamo la (≥).

($\leq$): Sia $f \in H_1$ di norma ≤ 1. Se $f = 0$ oppure $Tf = 0$ abbiamo banalmente $\|Tf\| = 0 \leq G$. Altrimenti siano $f' = \frac{f}{\|f\|}$ e $g' = \frac{Tf}{\|Tf\|}$. Allora

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \frac{\|f\|}{\|f\|} \frac{\|Tf\|^2}{\|Tf\|} = \|f\| \left\langle \frac{Tf}{\|f\|}, \frac{Tf}{\|Tf\|} \right\rangle \\ &\leq \left\langle T\left(\frac{f}{\|f\|}\right), \frac{Tf}{\|Tf\|} \right\rangle = \langle Tf', g' \rangle \leq \left| \langle Tf', g' \rangle \right|, \end{aligned}$$

che compare nell'estremo superiore G perché f' e g' hanno norma unitaria. Ciò prova la ($\leq$).

□

Dimostriamo ora la proposizione.

Dimostrazione. Per provare l'esistenza di un operatore che soddisfi il punto (1) osserviamo che per ogni $g \in H$ fissata il funzionale lineare $L = L_g$ definito da $L(f) := \langle Tf, g \rangle$ è limitato, infatti:

$$L(f) = \langle Tf, g \rangle \leq |\langle Tf, g \rangle| \leq \|Tf\| \|g\| \leq \|T\| \|f\| \|g\|,$$

per la limitatezza di T. La mappa L è anche lineare perché composizione di funzioni lineari continue (T ed $f \mapsto \langle f, g \rangle$). Quindi il teorema di rappresentazione di Riesz garantisce l'esistenza di un'unica $h \in H$, $h = h_g$, tale che $L_g(f) = L(f) = \langle f, h \rangle$. Quindi definiamo $T^* g := h_g = h$. Il fatto che T^* soddisfi (1) è immediato, mentre la linearità segue da

$$\begin{aligned} \langle f, h_{\lambda g} \rangle &= L_{\lambda g}(f) = \langle Tf, \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle Tf, g \rangle \\ &= \overline{\lambda} L_g(f) = \overline{\lambda} \langle f, h_g \rangle = \langle f, \lambda h_g \rangle, \quad \forall f \in H, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Quindi $T^*(\lambda g) = h_{\lambda g} = \lambda h_g = \lambda T^*(g)$.
Il fatto che $\|T\| = \|T^*\|$ segue da (1) e dal Lemma 1.3.3. Infatti

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|\langle Tf, g \rangle| \mid \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle f, T^* g \rangle| \mid \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1\} = \|T^*\|. \end{aligned}$$

Per provare la (3) notiamo che $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle$, $\forall f, g$, se e soltanto se $\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$ $\forall f, g$, come si può vedere prendendo i complessi coniugati ed invertendo i ruoli di f e g. □

Osservazione 1.3.4. *Mentre in dimensione finita la dimostrazione del teorema che abbiamo dato sfrutta le proprietà dell'aggiunto, quella relativa agli spazi di Hilbert generici fa l'opposto: l'esistenza dell'aggiunto è provata grazie al teorema di rappresentazione.*

Capitolo 2

Funzionali lineari positivi

2.1 Definizioni

In questo capitolo proseguiremo con un'altra versione del teorema, quella riguardante i funzionali lineari positivi sullo spazio delle funzioni a supporto compatto su uno spazio misurabile X (che supporremo essere di Hausdorff e localmente compatto). Ciò ci permetterà, nel capitolo successivo, di dimostrare altri due importanti casi del teorema. Avremo però bisogno di alcune definizioni e di alcuni concetti preliminari: daremo adesso quelli che incontreremo più frequentemente per poi introdurre i più specifici di volta in volta quando sarà necessario.

Definizione 2.1.1. *Una misura positiva è una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ dove $\mathcal{M}$ è una σ-algebra tale che μ è* numerabilmente additiva, *cioè se $\{A_i\}$ è una famiglia numerabile di elementi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti (cioè $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$), allora vale che $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$.*

Definizione 2.1.2. *Una misura complessa è una funzione $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, dove $\mathcal{M}$ è una σ-algebra, che è numerabilmente additiva.*

Osservazione 2.1.3. *In genere si dice solo "misura" e si omette il "positiva".*

Osservazione 2.1.4. *Il codominio di una misura positiva, a differenza di quello di una misura complessa, comprende il valore $+\infty$, quindi le misure positive non sono una sottofamiglia di quelle complesse!*

Definizione 2.1.5. *Dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$, si definisce l'*algebra di Borel *$\mathcal{B}$ di X rispetto a $\mathcal{T}$ come la più piccola σ-algebra contenente la topologia $\mathcal{T}$, ossia contenente ogni sottoinsieme aperto di $(X, \mathcal{T})$. Tutti gli insiemi $E \in \mathcal{B}$ si chiameranno* insiemi di Borel.

Definizione 2.1.6. *Una misura μ definita sulla σ-algebra di tutti gli insiemi di Borel in uno spazio di Hausdorff X localmente compatto si chiama* misura di Borel *su X.*

Definizione 2.1.7. *Data una misura di Borel μ e dato un insieme di Borel $E \subseteq X$, si dice che E è esternamente regolare se gode della proprietà:*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V,\ V\,aperto\ \subseteq X\}.$$

Si dice che E è internamente regolare se gode della proprietà :

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K\,compatto\ \subseteq X\}.$$

Se ogni insieme di Borel in X è sia esternamente che internamente regolare allora μ è detta regolare.

2.2 Integrazione di Funzioni Positive

Siano $\mathcal{M}$ una σ-algebra in un insieme X e μ una misura positiva su $\mathcal{M}$.

Definizione 2.2.1.

- *Se s è una funzione misurabile semplice su X (a valori in $\mathbb{C}$) della forma $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sono valori distinti di s, gli A_i, per $i = 1, \ldots, n$, sono insiemi misurabili e le χ_{A_i} le loro rispettive funzioni indicatrici, e se $E \in \mathcal{M}$, poniamo:*

$$\int_E s\,d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Usiamo qui la convenzione $0 \cdot \infty = 0$ perché può accadere che per qualche i valga $\alpha_i = 0$ e $\mu(A_i \cap E) = +\infty$.

- *Se $f : X \to [0, +\infty]$ è misurabile ed $E \in \mathcal{M}$, definiremo*

$$\int_E f\,d\mu := \sup_{0 \le s \le f} \int_E s\,d\mu,$$

dove le s sono funzioni semplici positive.
In tal caso $\int_E f\,d\mu$ si chiama Integrale di Lebesgue *di f su E rispetto alla misura μ.*

Osservazione 2.2.2. *Abbiamo definito l'integrale di Lebesgue per funzioni positive, quindi in tal caso l'integrale è compreso nell'intervallo esteso $[0, +\infty]$.*

Le seguenti proprietà sono conseguenze immediate delle definizioni; le funzioni e gli insiemi che vi compaiono sono supposte misurabili.

(a) Se $0 \leq f \leq g$, risulta $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$;

(b) se $A \subseteq B$ ed $f \geq 0$, risulta $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$;

(c) Se $f \geq 0$ e c è una costante, $0 \leq c \leq +\infty$, risulta $\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu$;

(d) Se $f(x) = 0$, $\forall x \in E$, risulta $\int_E f\, d\mu = 0$ anche se $\mu(E) = +\infty$;

(e) se $\mu(E) = 0$, risulta $\int_E f\, d\mu = 0$ anche se $f(x) = +\infty$ per ogni $x \in E$;

(f) Se $f \geq 0$, $\quad \int_E f\, d\mu = \int_X \chi_E f\, d\mu$.

Osservazione 2.2.3. *Quest'ultimo risultato mostra che avremmo potuto restringere ancora la nostra definizione d'integrazione agli integrali su tutto X senza perdere nulla in generalità. Se avessimo voluto integrare su sottoinsiemi, avremmo potuto usare la **(f)** come definizione.*

2.3 Preliminari Topologici

In questo paragrafo ci occuperemo dei teoremi preliminari che utilizzeremo durante la dimostrazione del nucleo centrale del capitolo: il Teorema 2.4.1.

Definizione 2.3.1. *Sia f una funzione reale (o a valori nella retta reale estesa) su uno spazio topologico X. Se l'insieme $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ è aperto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si dice che f è* semicontinua inferiormente. *Se invece è $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ ad essere aperto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, diremo che f è* semicontinua superiormente.

Proposizione 2.3.2.

(a) *Una funzione reale è continua se e soltanto se è sia semicontinua inferiormente che superiormente.*

(b) *Funzioni caratteristiche di insiemi aperti sono semicontinue inferiormente, funzioni caratteristiche di insiemi chiusi sono semicontinue superiormente.*

(c) *L'estremo superiore di ogni famiglia di funzioni semicontinue inferiormente è semicontinuo inferiormente. L'estremo inferiore di ogni famiglia di funzioni semicontinue superiormente è semicontinuo superiormente.*

Dimostrazione.

(a) Ricordiamo che $f : X \to \mathbb{R}$ è continua se e soltanto se $f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni insieme aperto A di $\mathbb{R}$. Allora $\{x \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$ è aperto perché $(\alpha, +\infty)$ è aperto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed f è continua e per la stessa ragione $\{x \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ e $(-\infty, \alpha)$ è aperto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Ciò prova la $(\Rightarrow)$. Per provare la $(\Leftarrow)$ ricordiamo che per ogni funzione f vale:

- $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$;
- $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$;

$\forall E, F$ sottoinsiemi del codominio.
Grazie a queste proprietà possiamo anche dimostrare la tesi lavorando solo sugli elementi di una base della topologia euclidea di $\mathbb{R}$.
Sia $D_r(a) = (a-r, a+r)$ con $a \in \mathbb{R},\ r > 0$ un generico elemento della base. Allora

$$\begin{aligned} f^{-1}((a-r, a+r)) &= f^{-1}((a-r, +\infty) \cap (-\infty, a+r)) \\ &= f^{-1}((a-r, +\infty)) \cap f^{-1}((-\infty, a+r)), \end{aligned}$$

che è un aperto perché intersezione finita di aperti (aperti per ipotesi).
Allora, dato un qualunque insieme aperto A di $\mathbb{R}$,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\cup_{a \in A} D_{r_a}(a)) = \cup_{a \in A} f^{-1}(D_{r_a}(a)),$$

che è aperto in quanto unione di aperti.

(b) Sia ora dato U, aperto di X. Mostriamo che χ_U è semicontinua inferiormente.
Infatti $\{x \mid \chi_U(x) > \alpha\}$ coincide con

- $\varnothing$, che è aperto, $\forall \alpha \geq 1$;
- U, $\forall \alpha \in [0, 1)$;
- X, $\forall \alpha < 0$.

Analogamente si dimostra che χ_C è semicontinua superiormente per ogni insieme chiuso C.

(c) Sia $\{f_i\}_i$ una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente e sia $f = \sup_i f_i$ (cioè $f(x) = \sup_i f_i(x)$).
Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo

$$T_f = \{x \mid f(x) > \alpha\} = \{x \mid \sup_i f_i(x) > \alpha\}.$$

Se riusciamo a provare che $\{x \mid \sup_i f_i(x) > \alpha\} = \cup_i \{x \mid f_i(x) > \alpha\}$ allora avremo concluso perché quest'ultima è, per ipotesi, un'unione di insiemi aperti.

($\subseteq$) Sia $x \in T_f$. Siccome vale il maggiore stretto $>$, allora per le proprietà dell'estremo superiore sappiamo che esiste un j tale che $f_j(x) > \alpha$, ma allora $x \in T_{f_j} \subseteq \cup_i T_{f_i}$.

($\supseteq$) Sia $x \in \cup_i T_{f_i}$, ciò significa che esiste un j tale che $x \in T_{f_j}$, per cui $f_j(x) > \alpha$ e quindi:

$$f(x) = \sup_i f_i(x) \geq f_j(x) > \alpha.$$

In definitiva $x \in T_f$.
Analogamente si dimostra l'altra asserzione.

□

Teorema 2.3.3. *Siano X uno spazio di Hausdorff, $K \subseteq X$ un insieme compatto e $p \in K^c = X \setminus K$. Allora esistono due insiemi aperti U, W tali che $p \in U$, $K \subseteq W$ ed $U \cap W = \varnothing$.*

Dimostrazione. Il caso $K = \varnothing$ è banale. Se invece $q \in K$, essendo X di Hausdorff, esistono U_q, V_q aperti disgiunti tali che $p \in U_q$ e $q \in V_q$. Andando a considerate tutti i punti $q \in K$ possiamo così costruirci un ricoprimento aperto $\{V_q\}$ di K, che è compatto. Perciò posso estrarre un sottoricoprimento finito: esistono dei punti $q_1, ..., q_n \in K$ tali che $K \subseteq V_{q_1} \cup ... \cup V_{q_n}$. Per ottenere la tesi basta porre $U = U_{q_1} \cap ... \cap U_{q_n}$ e $W = V_{q_1} \cup ... \cup V_{q_n}$. □

Teorema 2.3.4. *Se $\{K_\alpha\}$ è una famiglia di sottoinsiemi compatti di uno spazio di Hausdorff e se $\cap_\alpha K_\alpha = \varnothing$, allora esiste una sottofamiglia finita di $\{K_\alpha\}$ con intersezione vuota.*

Dimostrazione. Posto $V_\alpha := K_\alpha^c$ e fissato un elemento K_1 di $\{K_\alpha\}$, poiché nessun punto di K_1 appartiene ad ogni K_α, $\{V_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di K_1, che è compatto. Quindi abbiamo $K_1 \subseteq V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n}$ per una famiglia finita $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1,...,n}$. Ciò implica che

$$\varnothing = K_1 \cap (V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n})^c = K_1 \cap \left(\cap_{i=1}^n V_{\alpha_i}^c\right) = K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap ... \cap K_{\alpha_n}.$$

□

Teorema 2.3.5. *Sia U un aperto in uno spazio di Hausdorff localmente compatto X e sia $K \subseteq U$ un compatto. Allora esiste un insieme aperto V con chiusura compatta tale che:*

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Dimostrazione. $\forall x \in K$, $x \in X$, che è uno spazio localmente compatto, per cui x ha un intorno a chiusura compatta. Se facciamo variare x in K otteniamo un ricoprimento aperto di K. Dunque K è ricoperto da un'unione finita di questi intorni. Allora $K \subseteq G$ aperto a chiusura compatta (l'unione finita di tali intorni). Se $U = X$ la tesi è provata assumendo $V = G$, altrimenti poniamo $C = U^c$. Per il Teorema 2.3.3 ad ogni punto $p \in C(\subseteq K^c)$ corrisponde un insieme aperto W_p tale che $K \subseteq W_p$ e $p \notin \overline{W_p}$. Ciò implica che $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W_p}\}$, al variare di p in C, è una famiglia di insiemi compatti con intersezione vuota (perché $\forall p \in C$, $p \notin \overline{W_p}$). Dunque per il Teorema 2.3.4 esistono dei punti $p_1, \ldots, p_n \in C$ tali che $C \cap \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap ... \cap \overline{W_{p_n}} = \varnothing$, e quindi l'insieme $V := G \cap W_{p_1} \cap W_{p_n}$ ha le proprietà richieste perché

$$\overline{V} \subseteq \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap ... \cap \overline{W_{p_n}} \subseteq C^c \subseteq U.$$

□

Definizione 2.3.6. *Data una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ con X spazio topologico, si definisce supporto di f l'insieme* $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$. *Indicheremo poi con $C_c(X)$ l'insieme delle funzioni continue da X in $\mathbb{C}$ il cui supporto è un insieme compatto.*

Notazione:

- $K \prec f$ significa che:
  - K è un sottoinsieme compatto di X;
  - $f \in C_c(X)$;
  - $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in X$ ed in particolare $f(x) = 1$, $\forall x \in K$.
- $f \prec V$ significa che:
  - V è un aperto di X;
  - $f \in C_c(X)$;
  - $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in X$ e $\operatorname{supp} f \subseteq V$.
- $K \prec f \prec V$ significa che valgono entrambe le cose.

Teorema 2.3.7 (Lemma di Uryson).
Siano X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, V un aperto in X e $K \subseteq V$ un compatto. Allora esiste una funzione $f \in C_c(X)$ tale che $K \prec f \prec V$. Equivalentemente, esiste f continua tale che $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.

Osservazione 2.3.8. *È facile costruire funzioni semicontinue (superiormente o inferiormente) che soddisfano le condizioni, per esempio* χ_K *e* χ_V.

Dimostrazione del Teorema 2.3.7. Poniamo $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ e ordiniamo in una successione $r_3, r_4, r_5, ...$ i numeri razionali in $(0, 1)$. Per il Teorema 2.3.5 esistono due insiemi aperti V_0, V_1 tali che:

$$K \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V.$$

Supponiamo $n \geq 2$ e $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ scelti in modo tale che $r_i < r_j \Rightarrow \overline{V_{r_j}} \subseteq V_{r_i}$. Uno dei numeri $r_1, \ldots, r_n$, che chiamiamo r_i, sarà il più grande dei numeri minori di r_{n+1}, ed un altro, che chiamiamo r_j, sarà il più piccolo dei maggiori di r_{n+1} (r_i, r_j sono ben definiti perché $r_1 < r_{n+1} < r_2$), quindi $r_i < r_j$. Applicando ancora il Teorema 2.3.5 sarà possibile trovare un $V_{r_{n+1}}$ tale che $\overline{V_{r_j}} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V_{r_{n+1}}} \subseteq V_{r_j}$. Continuando in questo modo si ottiene una collezione $\{V_r\}$ di insiemi aperti, uno per ogni razionale $r \in [0, 1]$, dotata delle seguenti proprietà:
$K \subseteq V_1$, $\overline{V_0} \subseteq V$, ogni $\overline{V_r}$ è compatto e

$$s > r \Rightarrow \overline{V_s} \subseteq V_r. \tag{2.1}$$

Poniamo per definizione

$$f_r(x) = \begin{cases} r, & se\ x \in V_r \\ 0, & altrimenti \end{cases} \quad e \quad g_s(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \overline{V_s} \\ s, & altrimenti \end{cases},$$

quindi $f = \sup_r f_r$ e $g = \inf_s g_s$. Le osservazioni dopo la Definizione 2.3.1 mostrano che f è semicontinua inferiormente e che g è semicontinua superiormente, ciò segue dal fatto che $f_r = r\chi_{V_r}$, $g_s = \chi_{\overline{V_s}} + s\chi_{\overline{V_s}^c}$. È chiaro che $0 \leq f \leq 1$, che $f(x) = 1$ se $x \in K$, e che $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{V_0}$. Completeremo la dimostrazione provando che $f = g$.

(f ≤ g): La disuguaglianza $f_r(x) > g_s(x)$ è possibile solo se $r > s$, $x \in V_r$, ed $x \notin \overline{V_s}$. Ma $r > s \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_s \Rightarrow V_r \subseteq \overline{V_r} \subseteq V_s \subseteq \overline{V_s}$ che è una contraddizione. Quindi $f_r \leq g_s$, $\forall r, s$ e dunque $f \leq g$.

(f ≥ g): Se $f(x) < g(x)$ per qualche x, allora esistono dei numeri razionali r ed s tali che:

$$f(x) < r < s < g(x)$$

(semplicemente perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$). Ma da $f(x) < r$ segue che $x \notin V_r$ ed essendo $g(x) > s$ si ha $x \in \overline{V_s}$. Poiché in base alla (2.1) si giunge ad una contraddizione, abbiamo che $f(x) \geq g(x)$, $\forall x$.

□

Teorema 2.3.9. *Siano $V_1, ..., V_n$ sottoinsiemi aperti di uno spazio di Hausdorff X localmente compatto. Sia K compatto e tale che $K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Allora esistono delle funzioni $h_i \prec V_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, tali che*

$$h_1(x) + \ldots + h_n(x) = 1, \ \forall x \in K.$$

Definizione 2.3.10.
La famiglia $\{h_1, \ldots, h_n\}$ viene chiamata Partizione dell'unità su K subordinata al ricoprimento *$\{V_1, \ldots, V_n\}$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$, essendo $K \subseteq V_1 \cup ... \cup V_n$, $x \in V_i$ per un qualche i (che dipende da x). Siccome X è localmente compatto esiste un intorno compatto K_x di x tale che $x \in K_x \subseteq V_i$. Allora per il Teorema 2.3.5 esiste un intorno a chiusura compatta W_x tale che $K_x \subseteq W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V_i$. Quindi $\forall x \in K$ esiste un intorno a chiusura compatta W_x tale che $\overline{W_x} \subseteq V_i$ per un qualche i (dipendente da x). Il compatto K è ricoperto da questi W_x e dunque esiste un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_m$ tali che $W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_m} \supseteq K$. Sia H_i, $i = 1 \ldots, n$, l'unione di quei $\overline{W_{x_j}}$ $(j \in \{1, \ldots, m\})$ che sono contenuti in V_i. Per il Lemma di Urysohn 2.3.7 (H_i compatto $\subseteq V_i$ aperto) esistono delle funzioni g_i tali che $H_i \prec g_i \prec V_i$, $\forall i$. Poniamo per definizione:

$$\begin{cases} h_1 = g_1 \\ h_2 = (1 - g_1)\, g_2 \\ \vdots \\ h_n = (1 - g_1)(1 - g_2) \cdot ... \cdot (1 - g_{n-1})\, g_n \end{cases}$$

Risulta $h_i \prec Vi$ (perché $0 \leq g_i \leq 1$ e $\operatorname{supp} g_i \subseteq V_i \Rightarrow 0 \leq h_i \leq 1$ e $\operatorname{supp} h_i \subseteq V_i$) e si verifica facilmente per induzione su n che:

$$h_1 + \ldots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdot \ldots \cdot (1 - g_{n-1}).$$

Quindi, poiché $K \subseteq \overline{W_{x_1}} \cup \ldots \cup \overline{W_{x_m}} = H_1 \cup \ldots \cup H_n$ ed essendo $H_i \prec g_i$ per ogni x, allora dato $x \in K$ si ha $x \in H_i$ per un certo i, quindi $g_i(x) = 1$, da cui $h_1 + \ldots + h_n = 1$. □

2.4 Funzionali Lineari Positivi

A questo punto possiamo finalmente dedicarci all'obiettivo del capitolo: enunciare e dimostrare il Teorema di rappresentazione di Riesz per i funzionali lineari positivi.

Teorema 2.4.1.
Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e sia Λ un funzionale

lineare e positivo, cioè tale che $\Lambda f \geq 0$ *quando* f *è reale e* ≥ 0, *su* $C_c(X)$. *Esiste allora una* σ*-algebra* $\mathcal{M}$ *in* X *che contiene tutti gli insiemi di Borel in* X *ed esiste un'unica misura positiva* μ *su* $\mathcal{M}$ *che rappresenta* Λ, *nel senso che:*

(a) $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$, $\forall f \in C_c(X)$.
La misura μ *è inoltre dotata delle seguenti proprietà:*

(b) $\mu(K) < +\infty$, $\quad \forall\, K \subseteq X$, K *compatto;*

(c) $\forall E \in \mathcal{M}$ *si ha* $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V, V \text{ aperto}\}$;

(d) *Vale la relazione*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ compatto}\}, \tag{2.2}$$

per ogni insieme aperto E *e per ogni* $E \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(E) < +\infty$;

(e) *Se* $E \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$ *e* $\mu(E) = 0$, *risulta* $A \in \mathcal{M}$.

La proprietà **(a)** è naturalmente la più interessante. Definite $\mathcal{M}$ e μ, le proprietà da **(b)** a **(d)** verranno stabilite mentre dimostreremo che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è numerabilmente additiva. In tutta la dimostrazione le lettere K e V indicheranno rispettivamente un sottoinsieme compatto ed uno aperto di X.

Dimostrazione. Cominciamo col provare l'unicità della misura μ:

(Unicità): Se μ soddisfa **(c)** e **(d)** chiaramente è determinata, su $\mathcal{M}$, dai valori che assume sugli insiemi compatti. Se quindi μ_1 e μ_2 sono due misure che soddisfano il teorema basta provare che:

$$\mu_1(K) = \mu_2(K), \; \forall K.$$

Fissati K ed $\varepsilon > 0$, per **(b)** e **(c)** esiste un aperto $V \supseteq K$ tale che $\mu_1(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$, per il Lemma di Urysohn 2.3.7 esiste una funzione f tale che $k \prec f \prec V$. Da ciò si ricava che

$$\begin{aligned}\mu_1(K) = \int_X \chi_K\, d\mu_1 &\leq \int_X f\, d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f\, d\mu_2 \\ &\leq \int_X \chi_V\, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Dunque $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ e scambiando i ruoli di μ_1 e μ_2 si ottiene $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$, cioè

$$\mu_1(K) = \mu_2(K), \quad \forall K.$$

Perciò $\mu_1 = \mu_2$.

Osservazione 2.4.2. *Il calcolo precedente mostra che* ***(a)*** $\Rightarrow$ ***(b)*** *perché*

$$f \in C_c(X) \subseteq L^1(\mu) \;\Rightarrow\; \textit{se } f \equiv 1 \textit{ su } K,\; \Lambda f = \int_X f\,d\mu < +\infty$$

$$\textit{e } \Lambda f \geq \mu(K) \;\Rightarrow \mu(K) < +\infty.$$

Costruzione di μ e $\mathcal{M}$:
Per ogni insieme aperto V in X definiamo:

$$\mu(V) := \sup\{\Lambda f \mid f \prec V\}. \tag{2.3}$$

Se $V_1 \subseteq V_2$ la (2.3) implica chiaramente $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$.
Ciò implica che se E è un aperto, allora:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V, V\text{aperto}\}. \tag{2.4}$$

Sia allora μ definita dalla (2.4). Come abbiamo appena visto questa definizione è compatibile con la (2.3). Si osservi inoltre che nonostante $\mu(E)$ sia stata definita $\forall\, E \subseteq X$, l'additività numerabile di μ sarà dimostrata soltanto su una certa σ-algebra $\mathcal{M}$ in X.

- Sia $\mathcal{M}_F$ la classe di quegli $E \subseteq X$ tali che:

  - $\mu(E) < +\infty$;

  - E soddisfa la (2.2).

- Sia $\mathcal{M}$ la classe di tutti gli $E \subseteq X$ tali che $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ per ogni K compatto.

Mostriamo che μ e $\mathcal{M}$ hanno le proprietà richieste.

Come primo passo ci concentriamo su $\mathcal{M}_F$. È evidente che μ è monotòna su $\mathcal{M}_F$, cioè che $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_F$ tali che $A \subseteq B$, ed anche che $\mu(E) = 0$ implica $E \in \mathcal{M}_F$.

Dimostrazione. Siano $A, B \subseteq X$ tali che $A \subseteq B$. Per ogni insieme aperto V contenente B abbiamo che V contiene anche A e dunque

$$\mu(V) \geq \inf\{\mu(V') \mid A \subseteq V',\; V'\text{aperto} \subseteq X\} = \mu(A).$$

Quindi
$$\mu(A) \leq \inf\{\mu(V) \mid B \subseteq V,\; V\text{aperto} \subseteq X\} = \mu(B).$$

Dunque la monotonia vale per ogni $E \subseteq X$, in particolare su $\mathcal{M}$.
Sia ora $\mu(E) = 0$,

- $\mu(E) = 0 < +\infty$;

- $0 = \mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V, V \text{ aperto}\}$. Se proviamo che ciò è uguale a $\sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ compatto}\}$ abbiamo finito:

Poiché μ è monotòna, $\mu(K) \leq \mu(E) = 0, \quad \forall K \subseteq E$. Allora $\mu(K) = 0$ per ogni K compatto $\subseteq E$, e quindi

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ compatto}\} = \\ \sup\{0 \mid K \subseteq E, K \text{ compatto}\} = 0 = \mu(E).\end{aligned}$$

□

C'è di più: $\mu(E) = 0$ implica anche $E \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Sia K un compatto generico e consideriamo $E \cap K$:

- $E \cap K \subseteq E \Rightarrow \mu(E \cap K) \leq \mu(E) = 0 < +\infty$;
- Il punto precedente implica anche che $\mu(E \cap K) = 0$, quindi $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ per quanto appena visto.

Essendo soddisfatte entrambe le condizioni abbiamo che $E \in \mathcal{M}$. □

Osservazione 2.4.3. *Con lo stesso procedimento si prova che vale la **(e)**, mentre la **(c)** vale per definizione. La dimostrazione degli altri enunciati è piuttosto lunga, quindi la divideremo in passi successivi.*

Osservazione 2.4.4. *Se Λ è positiva allora è anche monotòna.*

Dimostrazione. Siano f e g due funzioni tali che $f \leq g$, allora per linearità abbiamo che $\Lambda g = \Lambda f + \Lambda(g - f)$, dove $\Lambda(g - f) \geq 0$ perché $g - f \geq 0$, da cui la tesi. □

- Se $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ sono sottoinsiemi arbitrari di X, risulta:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{2.5}$$

Dimostrazione della (2.5).
Cominciamo col dimostrare che dati V_1, V_2 aperti allora vale:

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2). \tag{2.6}$$

Si scelga $g \prec V_1 \cup V_2$ (cioè $g \in C_c(X)$, $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp} g \subseteq V_1 \cup V_2$) quindi $\operatorname{supp} g = K$ compatto $\subseteq V_1 \cup V_2$. Allora per il Teorema 2.3.9 esistono h_1, h_2

tali che $h_i \prec V_i$, $i = 1, 2$ ed $h_1(x) + h_2(x) = 1$, $\forall x \in \operatorname{supp} g$. Ma allora $h_i g \prec V_i$ ed inoltre per ogni $x \in \operatorname{supp} g$ vale:

$$g(x) = (h_1 + h_2)(x)\, g(x) = (h_1 g + h_2 g)(x),$$

cioè $g = h_1 g + h_2 g$, quindi:

$$\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \le \mu(V_1) + \mu(V_2), \tag{2.7}$$

e ciò vale $\forall g \prec V_1 \cup V_2$. Se ne deduce che anche la (2.6) è valida, perché $\mu(V_1 \cup V_2) = \sup\{\Lambda g \mid g \prec V_1 \cup V_2\}$ in quanto $V_1 \cup V_2$ è aperto.

Siamo ora in grado di provare la (2.5) nel caso generale.
Se $\mu(E_i) = +\infty$ per qualche i la tesi è banalmente vera (tutto è $\le +\infty$). Supponiamo quindi che $\mu(E_i) < +\infty$ per ogni i e fissiamo $\varepsilon > 0$.
Poiché per definizione $\mu(E_i) = \inf\{\mu(V) \mid E_i \subseteq V, V \text{ aperto}\}$, allora esistono degli insiemi aperti $V_i \supseteq E_i$ tali che:

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad \forall i = 1, 2, 3 \ldots$$

Poniamo $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ e scegliamo $f \prec V$. Poiché f ha supporto compatto, allora $f \prec V_1 \cup \ldots \cup V_n$ per qualche n (perché $K = \operatorname{supp} f$ ricoperto da $V_1, V_2 \ldots$, quindi esiste un sottoricoprimento finito $V_{i_1}, \ldots, V_{i_m}$ e quindi mi basta porre $n := \max_{j=1,\ldots,m}\{i_j\}$). Dunque, per induzione su n, usando la (2.6) e la (2.7), si ottiene che:

$$\Lambda f \le \mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) \le \mu(V_1) + \ldots + \mu(V_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Poiché ciò vale per tutte le f tali che $f \prec V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i \supseteq \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, allora

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \mu(V) = \sup\{\Lambda g \mid g \prec V\} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon,$$

e ciò lo riesco a fare per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ anche quando $\mu(E_i) < +\infty$ per ogni i. $\square$

- Si ha che

$$\mathcal{M}_F \text{ contiene ogni insieme compatto.} \tag{2.8}$$

Osservazione 2.4.5. *Ciò implica l'enunciato **(b)** del teorema.*

Dimostrazione della (2.8).
Mostriamo che ogni compatto K soddisfa la (2.2), cioè che

$$\mu(K) = \sup\{\mu(K') \mid K' \subseteq K, K' \text{ compatto}\}.$$

Siccome μ è monotona, se K' è un sottoinsieme compatto di K, allora $\mu(K') \leq \mu(K)$ e dunque vale la $(\geq)$. La $(\leq)$ segue dal fatto che $K \subseteq K$ perché questo fa sì che $\mu(K)$ compaia nell'estremo superiore. Proviamo che per ogni insieme K compatto vale che $\mu(K) < +\infty$. Dato un insieme compatto K, allora esiste una funzione f tale che $K \prec f$, per esempio, per il Lemma di Urysohn: preso un qualunque insieme aperto U di X contenente K, allora esiste una funzione f tale che $K \prec f \prec U$ (questa è una condizione molto più forte in realtà). Definiamo poi $V = \{x \mid f(x) > \frac{1}{2}\}$, che è aperto perché f è continua. Ora, $f|_K \equiv 1$, quindi $K \subseteq V$ e se $g \prec V$ allora $g < 2f$, infatti ciò significa che su V vale $0 \leq g \leq 1$, mentre $2f|_V > 1$. Quindi

$$\mu(K) \leq \mu(V) = \sup\{\Lambda g \mid g \prec V\} \leq \Lambda(2f).$$

Proviamo ora che $\Lambda(2f) < +\infty$.
Λ è un funzionale su $C_c(X)$, cioè $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$, e dunque, data la nostra f reale positiva,

$$\mathbb{C}(\supseteq \mathbb{R}) \ni \Lambda(2f) = |\Lambda(2f)|,$$

che è strettamente minore di $+\infty$ perché è il valore assoluto di un numero complesso. Questo conclude la dimostrazione. □

- Abbiamo che

$$\text{ogni insieme aperto soddisfa la (2.2).} \tag{2.9}$$

Quindi,

$$\mathcal{M}_F \text{ contiene tutti gli aperti } V \text{ con } \mu(V) < +\infty. \tag{2.10}$$

Dimostrazione della (2.9). Siano V un aperto ed α un numero reale tali che $\alpha < \mu(V)(= \sup\{\Lambda f \mid f \prec V\})$. Allora esiste una funzione $f \prec V$ tale che $\alpha < \Lambda f$. Se W è un qualsiasi insieme aperto contenente $K = \operatorname{supp} f$ allora $f \prec W$ e quindi $\Lambda f \leq \mu(W)$, dunque $\Lambda f \leq \mu(K) = \inf\{\mu(W) \mid K \subseteq W,\ W \text{ aperto}\}$. Ciò mostra che esiste un compatto $K \subseteq V$ tale che $\alpha < \mu(K) \leq \mu(V)$. Abbiamo provato che per ogni $\alpha < \mu(V)$ esiste un insieme K compatto tale che $\alpha < \mu(K) \leq \mu(V)$, cioè che V soddisfa la (2.2). Questo conclude la dimostrazione. □

- Se $E = \cup_{i=1}^{+\infty} E_i$ dove gli E_i sono elementi di $\mathcal{M}_F$ disgiunti a due a due, risulta

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i); \tag{2.11}$$

$$\text{se inoltre } \mu(E) < +\infty, \text{ è anche } E \in \mathcal{M}_F. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che se K_1 e K_2 sono due insiemi compatti disgiunti, allora

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{2.13}$$

Fisso un $\varepsilon > 0$, per il Teorema 2.3.5 (con $K_1 = K$ e $K_2^c = U$, cioè $K \subseteq U$) esistono due insiemi aperti disgiunti V_1, V_2 tali che $K_i \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. Infatti il Teorema dice che esiste un aperto V_1 con chiusura compatta tale che $K \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U$, ovvero che $K_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq K_2^c$. Quindi ponendo $V_2 := \overline{V_1}^c (\supseteq K_2)$ le condizioni sono soddisfatte. Secondo la (2.4) esiste un insieme aperto $W \supseteq K_1 \cup K_2$ tale che $\mu(W) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$, mentre per la (2.3) esistono funzioni $f_i \prec W \cap V_i$ (aperto perché intersezione di aperti) tali che $\Lambda f_i > \mu(W \cap V_i) - \varepsilon$ per $i = 1, 2$. Noto che $f_1 + f_2 \prec W$ in quanto $\operatorname{supp}(f_1 + f_2) \subseteq \operatorname{supp} f_1 \cup \operatorname{supp} f_2 \subseteq W$, ma i supporti delle due f_i sono disgiunti, quindi $0 \le f_1 + f_2 \le 1$ in W. Poiché vale anche che $K_i \subseteq W \cap V_i$, risulta

$$\begin{aligned}\mu(K_1) + \mu(K_2) &\le \mu(W \cap V_1) + \mu(W \cap V_2) < \Lambda f_1 + \Lambda f_2 + 2\varepsilon \\ &= \Lambda(f_1 + f_2) + 2\varepsilon \le \mu(W) + 2\varepsilon < \mu(K_1 \cup K_2) + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario abbiamo provato che $\mu(K_1) + \mu(K_2) \le \mu(K_1 \cup K_2)$. Dalla (2.5) segue invece la ($\ge$), da cui la tesi.
Torniamo ora alla parte centrale della dimostrazione, sia $E = \cup_{i=1}^{+\infty} E_i$ dove gli E_i sono elementi di $\mathcal{M}_F$ disgiunti a due a due. Supponiamo che sia $\mu(E) = +\infty$. Grazie alla (2.5) abbiamo

$$+\infty = \mu(E) = \mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i),$$

e dunque $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) = +\infty = \mu(E)$.
Supponiamo ora che sia $\mu(E) < +\infty$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Poiché ogni $E_i \in \mathcal{M}_F$ allora esistono degli insiemi compatti $H_i \subseteq E_i$ tali che

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad \forall i \ge 1.$$

Ponendo $K_n := H_1 \cup \ldots \cup H_n$ (unione disgiunta di compatti), dalla (2.13) otteniamo per induzione su n che

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \ge \mu(E_1 \cup \ldots \cup E_n) \ge \mu(H_1 \cup \ldots \cup H_n) = \mu(K_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon,\end{aligned}$$

e quindi, in particolare

$$\mu(K_n) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon, \quad \forall n \ge 1. \tag{2.14}$$

Poiché ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$ allora $\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$.
La $(\leq)$ è un caso particolare della (2.5), da cui la (2.11).
Inoltre, se $\mu(E) < +\infty$ ed $\varepsilon > 0$, la (2.11) mostra che, per N opportuno,

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

La (2.14) invece implica che

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) < \mu(K_N) + \varepsilon, \text{ da cui } \quad \mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon.$$

Abbiamo provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K(:= K_N)$ tale che $\mu(E) - 2\varepsilon \leq \mu(K) \leq \mu(E)$, quindi E soddisfa la (2.2), per cui $E \in \mathcal{M}_F$. $\square$

- Se $E \in \mathcal{M}_F$ ed $\varepsilon > 0$ allora esistono un compatto K ed un aperto V tali che

$$K \subseteq E \subseteq V \quad \text{e} \quad \mu(V \setminus K) < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Dimostrazione. Dalle due possibili scritture di $\mu(E)$ (la (2.2) e la (2.4)) sappiamo che esistono un compatto $K \subseteq E$ ed un aperto $V \supseteq E$ tali che

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'insieme $V \setminus K$ è aperto e $\mu(V \setminus K) \leq \mu(V) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$ perché $E \in \mathcal{M}_F$. Allora, per la (2.10), $V \setminus K \in \mathcal{M}_F$. Inoltre anche $K \in \mathcal{M}_F$ per la (2.8). Quindi la (2.11) implica che $\mu(V \setminus K) + \mu(K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$, e dunque $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$, cioè la tesi. $\square$

- Se $A \in \mathcal{M}_F$ e $B \in \mathcal{M}_F$ allora

$$\text{anche } A \setminus B,\ A \cup B \text{ ed } A \cap B\ \in \mathcal{M}_F \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il punto precedente esistono due insiemi K_1, K_2 compatti e due V_1, V_2 aperti tali che

$$K_1 \subseteq A \subseteq V_1,\ K_2 \subseteq B \subseteq V_2 \text{ e } \mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon, \text{ per } i = 1, 2.$$

Poiché

$$A \setminus B \subseteq V_1 \setminus B \subseteq V_1 \setminus K_2 \subseteq (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

per la (2.5) abbiamo

$$\mu(A \setminus B) \leq \mu(V_1 \setminus K_1) + \mu(K_1 \setminus V_2) + \mu(V_2 \setminus K_2) < 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

$A \setminus B = A \cap B^c$ e $K_1 \subseteq A$, $V_2^c \subseteq B^c$, per cui $K_1 \setminus V_2$ è un sottoinsieme compatto di $A \setminus B$. Da ciò segue che $A \setminus B$ soddisfa la (2.2). Inoltre

$\mu(A \setminus B) < +\infty$ perché $(A \setminus B) \subseteq A$ e $\mu(A) < +\infty$. Quindi $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$. Osserviamo che $(A \setminus B)$ e B sono due elementi di $\mathcal{M}_F$ che formano una partizione di $A \cup B$ e che per la (2.11) vale $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$. Siccome $\mu(A \setminus B)$ e $\mu(B)$ sono entrambi $< +\infty$, allora grazie alla (2.12) segue che $A \cup B \in \mathcal{M}_F$. Infine, essendo $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, entrambi in $\mathcal{M}_F$, anche $A \cap B \in \mathcal{M}_F$. $\square$

- Mostriamo che

$$\mathcal{M} \text{ è una } \sigma\text{-algebra in } X \text{ contenente tutti gli insiemi di Borel.} \tag{2.17}$$

Dimostrazione. Sia K un arbitrario compatto di X.

- Sia $A \in \mathcal{M}$, allora $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$, entrambi appartenenti ad $\mathcal{M}_F$, quindi per la (2.16) vi appartiene e dunque $A^c \in \mathcal{M}$ (cioè $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$).
- Sia $A = \cup_{i=1}^{+\infty} A_i$ dove $A_i \in \mathcal{M}$, $\forall i \geq 1$. Pongo

$$B_1 = A_1 \cap K \quad \text{e} \quad B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}), \ \forall n \geq 2.$$

Allora, in virtù della (2.16), $\{B_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}_F$ disgiunti a due a due ed $A \cap K = \cup_{i=1}^{+\infty} B_n$, infatti

$$\begin{aligned} A \cap K &= (\cup_{i \geq 1} A_i) \cap K \\ &= \cup_{i \geq 1} (A_i \cap K) \\ &= (A_1 \cap K) \cup (A_2 \cap K) \cup \ldots \\ &= (A_1 \cap K) \cup [(A_2 \cap K) \setminus (A_1 \cap K)] \cup \ldots \\ &= B_1 \cup B_2 \cup \ldots = \cup_{i \geq 1} B_i. \end{aligned}$$

Ne segue che, in base alla (2.12), $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ in quanto unione di elementi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}_F$ e $\mu(A \cap K) \leq \mu(K) < +\infty$ perché K è compatto, quindi per la (2.8) appartiene a $\mathcal{M}_F$. Poiché K era generico ciò vuol dire che $A \in \mathcal{M}$.
- Infine, se C è un chiuso, allora $C \cap K$ è compatto (ogni sottoinsieme chiuso di uno compatto è compatto), per cui dalla (2.8) segue che $C \cap K$ è un elemento di $\mathcal{M}_F$. Quindi $C \in \mathcal{M}$. In particolare troviamo che $X \in \mathcal{M}$.

Abbiamo così dimostrato che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra in X contenente tutti i sottoinsiemi chiusi di X. Dunque $\mathcal{M}$ contiene tutti gli insiemi di Borel di X. $\square$

- $\mathcal{M}_F$ consiste esattamente di quegli insiemi $E \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(E) < +\infty$. Equivalentemente

$$\mathcal{M}_F = \{E \in \mathcal{M} \mid \mu(E) < +\infty\}. \tag{2.18}$$

Osservazione 2.4.6. *Questo implica l'asserto* **(d)** *del Teorema.*

Dimostrazione della (2.18).

($\subseteq$): Sia $E \in \mathcal{M}_F$. Siccome la (2.8) dice che ogni compatto K sta in $\mathcal{M}_F$, allora, per la (2.16) abbiamo che $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ perché entrambi vi appartengono. Quindi $E \in \mathcal{M}$ ed inoltre $\mu(E) < +\infty$ per ipotesi perché $E \in \mathcal{M}_F$.

($\supseteq$): Supponiamo che sia $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < +\infty$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per la (2.4) esiste un aperto V tale che $E \subseteq V$ e $\mu(V) < +\infty$. Quindi V, per la (2.10), appartiene a $\mathcal{M}_F$. La (2.8) e la (2.15) ci dicono che esiste un compatto $K \subseteq V$ con $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Infatti, siccome V è aperto, allora per la (2.9) soddisfa la (2.2) e poiché $\mu(V) < +\infty$, per la (2.10) abbiamo che $V \in \mathcal{M}_F$. A questo punto la (2.15) ci dice che esistono un compatto K ed un aperto V' tali che

$$K \subseteq V \subseteq V' \quad \text{e} \quad \mu\left(V' \setminus K\right) < \varepsilon,$$

ma

$$(V \setminus K) \subseteq \left(V' \setminus K\right) \quad \Rightarrow \quad \mu(V \setminus K) < \varepsilon.$$

Poiché $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ ($E \in \mathcal{M}$) allora $E \cap K$ soddisfa la (2.2) e dunque esiste un compatto $H \subseteq E \cap K$ tale che $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$. Notiamo che $E \subseteq (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, infatti

$$\begin{aligned} E &= E \cap V = E \cap [(V \setminus K) \cup K] \\ &= (E \cap K) \cup [E \cap (V \setminus K)] \\ &\subseteq (E \cap K) \cup (V \setminus K). \end{aligned}$$

Per la (2.5) segue che

$$\mu(E) \leq \mu((E \cap K) \cup (V \setminus K)) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $H \subseteq E$ (perché $H \subseteq E \cap K$) tale che

$$\mu(E) - 2\varepsilon < \mu(H) \leq \mu(E),$$

cioè vale la (2.2) e siccome per ipotesi $\mu(E) < +\infty$, allora $E \in \mathcal{M}_F$.

$\square$

- μ è una misura su $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare l'additività numerabile su $\mathcal{M}$. Sia $\{A_i\}$ una famiglia numerabile di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti, vogliamo provare che

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu\left(A_i\right).$$

Innanzitutto la (2.17) implica che $A = \cup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{M}$, mentre la (2.5) ci fornisce la ($\leq$) perché ciò vale per tutti i sottoinsiemi di X. Proviamo ora la ($\geq$). Se fosse $\mu(A) = +\infty$ allora la tesi sarebbe conseguenza della ($\leq$). Supponiamo $\mu(A) < +\infty$. Siccome $A_i \subseteq A$ per tutti gli i, allora $\mu(A_i) < +\infty, \forall i$. Quindi gli A_i sono insiemi di $\mathcal{M}$ tali che $\mu(A_i) < +\infty$. Allora per la (2.18) appartengono tutti a $\mathcal{M}_F$ e dunque per la (2.11) $\mu(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$. Inoltre, visto che $\mu(A) < +\infty$, la (2.12) garantisce anche che $A \in \mathcal{M}_F$. $\square$

- Per ogni funzione $f \in C_c(X)$ vale

$$\Lambda f = \int_X f \, d\mu. \tag{2.19}$$

Questo prova **(a)** e completa la dimostrazione del Teorema. Per dimostrare la (2.19) abbiamo però bisogno di due definizioni.

Definizione 2.4.7. *Data una misura positiva μ su uno spazio topologico X definiamo*

$$L^1(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ è misurabile su } X \text{ e } \int_X |f| \, d\mu < +\infty\}.$$

Osservazione 2.4.8. *All'inizio del capitolo abbiamo definito l'integrazione di funzioni positive (e $|f|$ lo è). Definiremo l'integrale di funzioni complesse rifacendoci a quello di funzioni positive.*

Definizione 2.4.9. *Se $f = u + iv$ con u, v funzioni reali misurabili su X e se $f \in L^1(\mu)$, poniamo*

$$\int_X f \, d\mu := \int_X u^+ \, d\mu - \int_X u^- \, d\mu + i \int_X v^+ \, d\mu - i \int_X v^- \, d\mu,$$

dove con il $+$ ed il $-$ abbiamo indicato, rispettivamente, la parte positiva e la parte negativa delle funzioni coinvolte.

Osservazione 2.4.10. *La definizione è ben posta, infatti u^+, u^-, v^+, v^- sono tutte funzioni reali positve, inoltre $u^+ \leq |u| \leq |f|$ che ha integrale finito su X. Quindi tutti e quattro gli integrali sono finiti e dunque*

$$\int_X f \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione della (2.19). Per linearità basta provare l'asserto solo per una funzione reale, infatti, data una funzione complessa $f = u + iv$,

$$\begin{aligned}\Lambda f &= \Lambda (u + iv) = \Lambda u + i\Lambda v \\ &= \Lambda \left(u^+ - u^-\right) + i\Lambda \left(v^+ - v^-\right) = \Lambda u^+ - \Lambda u^- + i\Lambda v^+ - i\Lambda v^- \\ &= \int_X u^+ \, d\mu - \int_X u^- \, d\mu + i \int_X v^+ \, d\mu - i \int_X v^- \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu.\end{aligned}$$

Inoltre è sufficiente dimostrare che $\Lambda f \leq \int_X f \, d\mu$ perché una volta provato ciò l'uguaglianza segue dalla linearità di Λ:

$$-\Lambda f = \Lambda (-f) \leq \int_X (-f) \, d\mu = - \int_X f \, d\mu,$$

da cui $\Lambda f \geq \int_X f \, d\mu$ e dunque l'uguaglianza.
Sia allora $K = \text{supp} f$, con $f \in C_c (X)$, f reale. K è compatto ed f è continua, dunque $f (K)$ è compatto e quindi limitato. Sia $[a, b]$ un intervallo in $\mathbb{R}$ contenente $f (X)$ (questo intervallo esiste perché $f (X) = f (K) \cup \{0\}$). Scegliamo un $\varepsilon > 0$ e degli $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tali che valgano entrambe le condizioni

$$y_i - y_{i-1} < \varepsilon, \ \forall i > 0 \quad \text{ed} \quad y_0 < a < y_1 < \ldots < y_n = b.$$

Per ogni $i = 1, \ldots, n$, poniamo $E_i = \{x \mid y_{i-1} < f (x) \leq y_i\} \cap K$. Poiché f è continua, essa è misurabile secondo Borel, perciò gli E_i sono insiemi di Borel disgiunti la cui unione è K (perché $f (K) \subseteq f (X) \subseteq [a, b] \subseteq (y_0, b]$). Siccome ogni E_i è sottoinsieme di X allora, per la (2.4), esistono degli insiemi aperti $V_i \supseteq E_i$ tali che

$$\mu (V_i) < \mu (E_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \tag{2.20}$$

ed

$$f (x) < y_i + \varepsilon, \ \forall x \in V_i, \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

La (2.21) deriva dal fatto che f è continua e che su E_i è $\leq y_i$. Questo vuol dire che se ci si "allontana" di poco da E_i il valore di f potrà salire sopra y_i, ma dovrà farlo con continuità. Quindi dopo aver scelto V_i in modo che valga la (2.20), si può eventualmente "rimpicciolirlo" per far sì che valga anche la (2.21). Per il Teorema 2.3.9 esistono dunque delle funzioni $h_i \prec V_i$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1 \text{ su } K \quad (\text{perché } \cup_{i=1}^n V_i \supseteq \cup_{i=1}^n E_i = K).$$

Allora $f = \sum h_i f$ (perché fuori da K si ha $f = 0$). Sia ora $x \in E_i$. Si ha

$$E_i \subseteq V_i \ \Rightarrow \ f (x) < y_i + \varepsilon \ \Rightarrow \ h_i (x) f (x) < h_i (x) (y_i + \varepsilon),$$

e

$$\begin{cases} y_{i-1} < f(x) \le y_i \\ y_i - y_{i-1} < \varepsilon \end{cases} \implies y_i - \varepsilon < f(x).$$

Dunque, su E_i vale sia $h_i(x) f(x) < h_i(x)(y_i + \varepsilon)$ che $y_i - \varepsilon < f(x)$. Allora risulta

$$\begin{aligned} \Lambda f &= \sum_{i=1}^{n} \Lambda(h_i f) \le \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \Lambda h_i \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \mu(V_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo $2\varepsilon\mu(E_i)$ nella prima sommatoria ottengo

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} 2\varepsilon\mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n},$$

dove,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n} &\le \sum_{i=1}^{n} (b + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n} = (b + \varepsilon) \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} 2\varepsilon\mu(E_i) &= 2\varepsilon\mu(\cup_{i=1}^{n} E_i) = 2\varepsilon\mu(K). \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\Lambda f \le \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + (b + \varepsilon)\varepsilon.$$

Siccome $(y_i - \varepsilon)\mu(E_i)$ rappresenta il calcolo dell'integrale su E_i della funzione $(y_i - \varepsilon)\chi_{E_i}$ e siccome $y_i - \varepsilon < f|_{E_i}$, si ha $(y_i - \varepsilon)\mu(E_i) \le \int_{E_i} f\,d\mu$. Da ciò otteniamo

$$\Lambda f \le \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\,d\mu + \varepsilon[2\mu(K) + (b + \varepsilon)] = \int_X f\,d\mu + \varepsilon[2\mu(K) + (b + \varepsilon)].$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo quindi provato che $\Lambda f \le \int_X f\,d\mu$. Questo conclude la dimostrazione della (2.19). □

La dimostrazione del Teorema 2.4.1 è terminata. □

Capitolo 3

Funzionali lineari limitati

3.1 Definizioni

In questo capitolo definiremo il concetto di integrazione rispetto ad una misura complessa, del quale avremo bisogno per dare l'enunciato del Teorema di Rappresentazione di Riesz per i funzionali lineari limitati sullo spazio delle funzioni continue che si annullano all'infinito. Iniziamo la trattazione introducendo alcune definizioni ed alcuni concetti.

Sia $\mathcal{M}$ una σ-algebra in un insieme X.

Definizione 3.1.1. *Chiameremo partizione di $E \in \mathcal{M}$ una famiglia numerabile $\{E_i\}_{i \geq 1}$ di elementi di $\mathcal{M}$ tali che*

- $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$;
- $E = \cup_{i \geq 1} E_i$.

Una misura complessa μ su $\mathcal{M}$ è una funzione complessa su $\mathcal{M}$ tale che

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i), \tag{3.1}$$

per ogni partizione $\{E_i\}_{i \geq 1}$ di E.

Osservazione 3.1.2. $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ *implica* $|\mu(E)| < +\infty$ *per ogni* $E \in \mathcal{M}$. *Quindi la serie* (3.1) *deve convergere (mentre per le misure positive ciò non accade).*

Osservazione 3.1.3. *Ogni riordinamento della* (3.1) *deve ancora convergere perché l'unione di tutti gli E_i non cambia permutando gli indici. Questo comporta che la serie converge assolutamente.*

Problema: Trovare una misura positiva λ che domini una misura complessa μ su $\mathcal{M}$, nel senso che $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$, $\forall E \in \mathcal{M}$, cercando di mantenere λ

la più piccola possibile.

Ogni soluzione del nostro problema, ammettendo che ne esista una, dovrà perciò soddisfare la condizione

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(E_i) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(E_i)|,$$

per ogni partizione $\{E_i\}$ di qualsiasi insieme $E \in \mathcal{M}$. Cosicché

$$\lambda(E) \geq \sup_{\{E_i\} \text{ partizione di } E} \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(E_i)|. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.1.4. *Si sa che per ogni partizione* $\{E_i\}$ *vale* $\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$ *e che quindi, date due partizioni* $\{E_i\}$ *ed* $\{E'_j\}$*, se* μ *è una misura complessa, il risultato è sempre lo stesso:*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\left(E'_j\right).$$

Grazie all'Osservazione 3.1.3 *sappiamo anche che* $\sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(E_i)| < +\infty$ *per ogni partizione* $\{E_i\}$*, ma stavolta non è detto che le serie dei valori assoluti convergano sempre allo stesso valore perché su queste non si hanno condizioni. È per questo motivo che usiamo il* $\geq$ *nella* (3.2).

Questo porta a definire una *funzione di insieme* $|\mu|$ su $\mathcal{M}$

Definizione 3.1.5. *Per ogni* $E \in \mathcal{M}$ *definiamo*

$$|\mu|(E) := \sup_{\{E_i\} \text{ partizione di } E} \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(E_i)|$$

la (misura) variazione totale *di* μ*. A volte il termine "*variazione totale di μ*" viene utilizzato per indicare il numero* $|\mu|(X)$*.*

Osservazione 3.1.6. $\sup \sum |\mu(E_i)| = |\mu|(E) \geq |\mu(E)| = |\sum \mu(E_i)|$.

Proposizione 3.1.7. *La variazione totale* $|\mu|$ *di una misura complessa* μ *su* $\mathcal{M}$ *è una misura positiva su* $\mathcal{M}$*.*

Questo significa che il nostro problema ha sempre soluzione. Chiaramente $|\mu|$ è la soluzione minimale, cioè ogni altra soluzione λ è tale che $\lambda(E) \geq |\mu|(E)$, per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $|\mu|$ è numerabilmente additiva, cioè che per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ e per ogni sua partizione $\{E_i\}_{i\geq 1}$ vale

$$\sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i) = |\mu|(E).$$

($\leq$): Sia $\{t_i\}_{i\geq 1}$ una famiglia di numeri reali tali che $t_i < |\mu|(E_i)\,,\ \forall i \geq 1$. Per definizione di $|\mu|$ e quindi di estremo superiore, ogni E_i ha una partizione $\{A_{ij}\}_{j\geq 1}$ tale che

$$|\mu|(E_i) \geq \sum_{j\geq 1} |\mu(A_{ij})| > t_i.$$

Poiché $\{A_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ è una partizione di E, ne segue che

$$\sum_{i\geq 1} t_i < \sum_{i,j\geq 1} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E)\,. \tag{3.3}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le possibili scelte di $\{t_i\}_{i\geq 1}$ nel primo membro della (3.3), ottengo che il secondo membro diventa esattamente $|\mu|(E_i)$. Quindi si vede che

$$\sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)\,,$$

cioè vale la ($\leq$).

($\geq$): Per dimostrare la disuguaglianza opposta, sia $\{A_j\}_{j\geq 1}$ un'altra partizione di E. Per ogni j fissato $\{A_j \cap E_i\}_{i\geq 1}$ è una partizione di A_j e viceversa: per ogni i fissato $\{A_j \cap E_i\}_{j\geq 1}$ è una partizione di E_i. Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1} |\mu(A_j)| &= \sum_{j\geq 1} \left| \sum_{i\geq 1} \mu(A_j \cap E_i) \right| \\ &\leq \sum_{j\geq 1} \sum_{i\geq 1} |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_{i\geq 1} \sum_{j\geq 1} |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i)\,.\end{aligned}$$

Poiché ciò vale per ogni partizione $\{A_j\}_{j\geq 1}$ di E otteniamo che

$$\sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i) \geq |\mu|(E)\,, \tag{3.4}$$

cioè vale la ($\geq$).

□

Osservazione 3.1.8. *Se μ è una misura positiva allora $|\mu| = \mu$.*

Un'altra proprietà importante ed insospettata è la seguente:

Proposizione 3.1.9. *Se μ è una misura complessa su X, allora*

$$|\mu|(X) < +\infty.$$

Ma allora per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ vale che

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X) < +\infty.$$

Dunque ogni misura complessa μ su una qualsiasi σ-algebra è limitata: $\mu(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{C}$ e di fatto $\mu(\mathcal{M})$ è contenuto in qualche disco di raggio finito. Questa proprietà viene talvolta espressa dicendo che μ è *a variazione limitata*. Per dimostrarla faremo uso di un lemma:

Lemma 3.1.10. *Se $z_1, \ldots, z_n$ sono numeri complessi allora esiste un sottoinsieme S di $\{1, \ldots, n\}$ tale che*

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j| ..$$

Dimostrazione. Poniamo $w = |z_1| + \ldots + |z_n|$. Il piano complesso è l'unione di quattro quadranti chiusi e limitati dalle rette $y = \pm x$. Almeno uno di questi quadranti ha la proprietà che la somma dei $|z_j|$, fatta sugli z_j che vi appartengono, è almeno $w/4$. Infatti, se per tutti e quattro fosse minore di $w/4$, si avrebbe

$$w = |z_1| + \ldots + |z_n| < 4\frac{w}{4} = w,$$

che è assurdo. Equivalentemente, chiamando Q questo quadrante (ruotando e per passaggio all'opposto si può fare l'ipotesi non restrittiva che esso sia quello definito da $|y| \leq x$), abbiamo che $\sum_{z_j \in Q} |z_j| \geq \frac{w}{4}$. Per $z \in Q$, detto θ è l'angolo compreso fra l'asse delle ordinate e la semiretta passante per z ed uscente dall'origine, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\theta \leq 1.$$

Questo perché $z \in Q$, cioè $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e dunque $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\theta \leq 1$. Quindi per $z \in Q$ abbiamo

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos\theta \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}.$$

Se S è l'insieme di tutti i j per i quali $z_j \in Q$, ne segue che

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \sum_{j \in S} \mathrm{Re} z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S} |z_j| \geq \frac{w}{4\sqrt{2}} \geq \frac{w}{6}.$$

□

Dimostriamo ora la proposizione.

Dimostrazione. Proveremo anzitutto che, se $|\mu|(E) = +\infty$ per qualche $E \in \mathcal{M}$, risulta $E = A \cup B$ dove $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \varnothing$ e

$$|\mu(A)| > 1, \quad |\mu|(B) = +\infty. \tag{3.5}$$

Infatti, in base alla definizione di $|\mu|$, ad ogni $t < +\infty$ corrisponde una partizione $\{E_j\}$ di E tale che $\sum_j |\mu(E_j)| > t$. Fissiamo $t = 6(1 + |\mu(E)|)$, che è $< +\infty$ perché μ è una misura complessa, quindi per quanto detto precedentemente $|\mu(E)| < +\infty$. Risulta allora

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > t,$$

per un n opportuno. Applicando il Lemma 3.1.10 con $z_j = \mu(E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e posto

$$A = \cup_{j \in S} E_j\ ,$$

dove S è il sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ determinato dal Lemma, si ha che $A \subseteq E$ e che

$$\begin{aligned} |\mu(A)| &= \left| \sum_{j \in S} \mu(E_j) \right| = \left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > \ t/6 \ = 1 + |\mu(E)| > \ 1. \end{aligned}$$

In particolare $|\mu(A)| > |\mu(E)|$, dove A è un insieme la cui costruzione dipende dalla partizione che avevamo scelto per maggiorare t. Questo vuol dire che, passando all'estremo superiore sulle partizioni di E, $|\mu|(A) = |\mu|(E) = +\infty$. Ora, se $B = E \setminus A$, risulta

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{6} - |\mu(E)| = 1.$$

Poiché $|\mu|(E) = |\mu|(A)$, in base alla Proposizione 3.1.7 valgono l'una o l'altra delle relazioni $|\mu|(A) = +\infty$ o $|\mu|(B) = +\infty$ (o ambedue) ed otteniamo la (3.5) scambiando eventualmente A e B. Supponiamo ora che $|\mu|(X) = +\infty$ e poniamo $B_0 = X$. Per ogni $n \geq 1$ applichiamo il procedimento precedente a B_{n-1} e determiniamo una sua partizione composta di due insiemi A_n e B_n disgiunti ed appartenenti a $\mathcal{M}$, tali che

$$|\mu(A_n)| > 1, \quad |\mu|(B_n) = +\infty.$$

Otteniamo così per induzione su n degli insiemi disgiunti $A_1, A_2, A_3, \ldots$, con $|\mu(A_n)| > 1$. Se $C = \cup_{n\geq 1} A_n$, l'additività numerabile di μ mostra che

$$\mu(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Ma questa serie non può convergere in quanto $\mu(A_n)$ non tende a zero per $n \to +\infty$. Cioè C è un elemento di $\mathcal{M}$ su cui μ non è ben definita. Questa contraddizione prova che deve valere $|\mu|(X) < +\infty$. $\square$

Definizione 3.1.11. *Se μ e λ sono misure complesse sulla stessa σ-algebra $\mathcal{M}$, definiamo $\mu + \lambda$ e $c\lambda$ (con c scalare) nel seguente modo:*

$$(\mu + \lambda)(E) := \mu(E) + \lambda(E),$$
$$(c\lambda)(E) := c\lambda(E),$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$.
Si verifica facilmente che $\mu + \lambda$ e $c\lambda$ sono ancora misure complesse. Questo vuol dire che l'insieme di tutte le misure complesse su $\mathcal{M}$ è uno spazio vettoriale. Posto $\|\mu\| := |\mu|(X)$ si verifica facilmente che tutti gli assiomi di uno spazio lineare normato sono soddisfatti.

Prendiamo ora una misura *reale* μ su una σ-algebra $\mathcal{M}$, cioè una misura *complessa a valori reali* (anche negativi quindi). Definiamo come prima $|\mu|$ e poniamo:

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Sia μ^+ che μ^- sono misure positive su $\mathcal{M}$, infatti

$$\begin{aligned} \left|\mu^+(E)\right| &= \frac{1}{2}\left|(|\mu|(E) + \mu(E))\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\left||\mu|(E)\right| - |\mu(E)|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mu|(E) - |\mu(E)|\right) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

per definizione di $|\mu|$, ed analogamente per μ^-. Inoltre, in base alla Proposizione 3.1.9, sono entrambe limitate. Osserviamo infine che

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^- .$$

Definizione 3.1.12. *Le misure μ^+ e μ^- vengono chiamate rispettivamente variazione positiva e negativa di μ. Questa rappresentazione di μ come differenza delle misure positive μ^+ e μ^- è nota come* Decomposizione di Jordan *di μ.*

3.2 Continuità Assoluta

Definizione 3.2.1. *Sia μ una misura positiva su una σ-algebra $\mathcal{M}$ e sia λ una misura arbitraria su $\mathcal{M}$, quindi λ può essere positiva o complessa.*

- *Diremo che λ è* assolutamente continua *rispetto a μ e scriveremo*

$$\lambda \ll \mu,$$

se per ogni $E \in \mathcal{M}$ vale

$$\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(E) = 0.$$

- *Se esiste un insieme $A \in \mathcal{M}$ tale che $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$, diremo che λ è* concentrata *su A;*

  Osservazione 3.2.2. *Questo equivale a dire che $\lambda(E) = 0$ ogni volta che E è disgiunto da A. In formule abbiamo:*

$$\left.\begin{array}{c}\lambda \text{ è concentrata}\\ \text{su } A\end{array}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c}E \cap A = \varnothing \;\Rightarrow\; \lambda(E) = 0,\\ \forall E \in \mathcal{M}.\end{array}\right.$$

  Infatti

  ($\Rightarrow$): *Banalmente $\lambda(E) = \lambda(A \cap E) = \lambda(\varnothing) = 0$.*

  ($\Leftarrow$): *Abbiamo $\lambda(E) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A^c \cap E)$. Siccome $(A^c \cap E) \cap A = \varnothing$, allora $\lambda(A^c \cap E) = 0$, per cui vale la tesi.*

- *Siano λ_1 e λ_2 due misure su $\mathcal{M}$ e supponiamo che esistano due insiemi A e B disgiunti tali che λ_1 è concentrata su A e λ_2 su B. Diremo allora che λ_1 e λ_2 sono* singolari *tra loro e scriveremo $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

Dalla definizione seguono in maniera immediata le seguenti proprietà.

Proposizione 3.2.3. *Siano μ, λ, λ_1 e λ_2 misure su una σ-algebra $\mathcal{M}$ ed $A \in \mathcal{M}$. Supponiamo che μ sia positiva, allora valgono*

(a) *Se λ è concentrata su A, allora anche $|\lambda|$ lo è;*

(b) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \;\Rightarrow\; |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$;

(c) $\lambda_1 \perp \mu$ *e* $\lambda_2 \perp \mu \;\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$;

(d) $\lambda_1 \ll \mu$ *e* $\lambda_2 \ll \mu \;\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$;

(e) $\lambda \ll \mu \;\Rightarrow |\lambda| \ll \mu$;

(f) $\lambda_1 \ll \mu$ *e* $\lambda_2 \perp \mu \;\Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$;

(g) $\lambda \ll \mu$ *e* $\lambda \perp \mu \;\Rightarrow \lambda \equiv 0$.

Dimostrazione.

(a) Se $E \cap A = \varnothing$ ed $\{E_j\}$ è una qualsiasi partizione di E, allora $\lambda(E_j) = 0$, $\forall j$, perché $E_j \cap A = \varnothing$. Quindi $|\lambda|(E) = 0$.

(b) Segue immediatamente dalla **(a)**.

(c) Esistono insiemi disgiunti A_1 e B_1 tali che λ_1 è concentrata su A_1 e μ su B_1 ed esistono insiemi disgiunti A_2 e B_2 tali che λ_2 è concentrata su A_2 e μ su B_2. Ponendo $A = A_1 \cup A_2$, si ha che A_1 è sottoinsieme di A, dunque $A_1 \cap A = A_1$. Lo stesso vale per A_2, pertanto, per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(E) + \lambda_2(E) &= \lambda_1(A_1 \cap E) + \lambda_2(A_2 \cap E) \\
&= \lambda_1((A_1 \cap A) \cap E) + \lambda_2((A_2 \cap A) \cap E) \\
&= \lambda_1(A_1 \cap (A \cap E)) + \lambda_2(A_2 \cap (A \cap E)) \\
&= \lambda_1(A \cap E) + \lambda_2(A \cap E).
\end{aligned}$$

Cioè $\lambda_1 + \lambda_2$ è concentrata su A. Sia ora $B = B_1 \cap B_2$, allora

$$\mu(E) = \mu(B_1 \cap E) = \mu(B_2 \cap (B_1 \cap E)) = \mu(B \cap E),$$

ovvero μ è concentrata su B, che è disgiunto da A. Questo prova la tesi.

(d) Segue immediatamente dalla definizione.

(e) Supponiamo che $\mu(E) = 0$ e che $\{E_j\}$ sia una partizione di E. Risulta $\mu(E_j) = 0$ ed essendo $\lambda \ll \mu$, $\lambda(E_j) = 0$, per ogni j, allora $\sum_j |\lambda(E_j)| = 0$, il che implica $|\lambda|(E) = 0$.

(f) Essendo $\lambda_1 \ll \mu$, esiste un insieme A, con $\mu(A) = 0$, sul quale è concentrata λ_2 ed inoltre, per lo stesso motivo, $\lambda_1(E) = 0$ per ogni insieme $E \subseteq A$. Pertanto λ_1 è concentrata su A^c.

(g) In base alla **(f)**, l'ipotesi **(g)** implica che $\lambda \perp \lambda$, e ciò ovviamente fa sì che $\lambda \equiv 0$.

$\square$

3.3 Preliminari

Ricordiamo al lettore l'enunciato di un importante teorema che sfrutteremo nel corso di questo capitolo.

Teorema di Beppo-Levi sulla convergenza monotòna. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili su* X *e supponiamo che*

(a) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le +\infty, \quad \forall x \in X$;

(b) $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x), \quad \forall x \in X.$

La funzione f è allora misurabile e

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu \, .$$

Ora, rifacendoci alla definizione di $L^1(\mu)$ definiamo cos'è uno spazio L^p.

Definizione 3.3.1. *Dati μ una misura positiva su uno spazio topologico X e $p \in [1, +\infty)$, definiamo*

$$L^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ è misurabile su } X \text{ e } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty\}.$$

Questo spazio, dotato della norma $\| \cdot \|_p$, definita da

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(\mu),$$

è di Banach. Definiamo inoltre

$$L^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ è misurabile su } X \text{ e } |f| \text{ è limitato quasi ovunque}\}.$$

Anche questo spazio dotato della norma estremo superiore essenziale $\| \cdot \|_\infty$, *definita da*

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid |f(x)| \le c, \quad \text{quasi per ogni } x \in X\}, \quad \forall f \in L^\infty(\mu),$$

è di Banach.

Osservazione 3.3.2. *Per $p = 1$ ritroviamo la definizione di $L^1(\mu)$.*

Osservazione 3.3.3. *Se $p = 2$ osserviamo che $\|f\|_2$ è la radice quadrata di*

$$\int_X |f|^2 \, d\mu = \int_X \overline{f} f \, d\mu.$$

Si vede anche che l'applicazione

$$(f, g) \mapsto \int_X \overline{f} g \, d\mu, \quad \forall f, g \in L^2(\mu),$$

è un prodotto hermitiano. Questo vuol dire che $L^2(\mu)$ è uno spazio di Hilbert perché la sua norma è indotta da un prodotto hermitiano.

Definizione 3.3.4. *Dato $p \in (1, +\infty)$ definiamo il suo* esponente coniugato *come quell'unico $q \in (1, +\infty)$ tale che valga*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = 1$ si pone $q = \infty$ e viceversa.

Teorema 3.3.5. *Siano μ e λ misure positive limitate su una σ-algebra $\mathcal{M}$ in un insieme X. Allora*

(a) *Esiste una sola coppia di misure λ_a e λ_s su $\mathcal{M}$ tali che*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s; \quad \lambda_a \ll \mu; \quad \lambda_s \perp \mu. \tag{3.6}$$

Queste misure sono positive e $\lambda_a \perp \lambda_s$.

(b) *Esiste un'unica funzione $h \in L^1(\mu)$ tale che*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}. \tag{3.7}$$

Definizione 3.3.6. *La coppia formata da λ_a e λ_s viene chiamata decomposizione di* Lebesgue *di λ rispetto a μ.*

Osservazione 3.3.7. *Per tali motivi l'asserto **(a)** del precedente Teorema è conosciuto come "Teorema di decomposizione di Lebesgue", mentre l'asserto **(b)** è conosciuto come "Teorema di Radon-Nikodym".*

Definizione 3.3.8. *La funzione h del punto **(b)** si chiama* derivata *di Radon-Nikodym di λ_a rispetto a μ. La* (3.7) *si può esprimere anche nella forma*

$$d\lambda_a = h d\mu, \qquad \textit{oppure} \qquad h = d\lambda_a / d\mu.$$

Dimostrazione. L'unicità della decomposizione, a patto che ne esista una, si verifica facilmente, in quanto se λ'_a, λ'_s è un'altra coppia soddisfacente la (3.6), allora

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda = \lambda'_a + \lambda'_s \quad \Rightarrow \quad \lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s \,.$$

Ora, essendo $\lambda'_a \ll \mu$, allora λ'_a è limitata, dunque è una misura complessa (una misura positiva e limitata è sempre una misura complessa). Questo vuol dire che anche la misura $-\lambda'_a$ è una misura complessa. Banalmente $-\lambda'_a \ll \mu$ e quindi, per il punto **(d)** della Proposizione 3.2.3, $\lambda'_a - \lambda_a \ll \mu$ ed analogamente, utilizzando il punto **(c)** della medesima proposizione, si prova che $(\lambda'_a - \lambda_a =)\ \lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$.
A questo punto l'unicità della decomposizione è provata applicando l'asserto **(g)** della Proposizione 3.2.3, mentre quella di h è immediata in quanto, se $h' \in L^1(\mu)$ è un'altra funzione che soddisfa la (3.7) allora per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ vale

$$\int_E \left(h - h'\right)\, d\mu = \int_E h\, d\mu - \int_E h'\, d\mu = \lambda_a(E) - \lambda_a(E) = 0.$$

Quindi $h \equiv h'$ quasi ovunque, cioè sono uguali in $L^1(\mu)$. Passiamo ora all'esistenza.

Posto $\varphi = \lambda + \mu$, φ è una misura positiva limitata su $\mathcal{M}$. La definizione di somma di due misure mostra che

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\lambda + \int_X f\,d\mu,$$

per $f = \chi_E$ (per tale f abbiamo $\int_X f\,d\mu = \mu(E)$). Di conseguenza ciò sarà vero anche per ogni funzione f semplice e per ogni funzione $f \geq 0$ misurabile. Se $f \in L^2(\varphi)$, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue che

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,d\lambda \leq \int_X |f|\,d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} (\varphi(X))^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo $\varphi(X) < +\infty$ (φ è limitata per ipotesi), si vede che l'applicazione $f \mapsto T(f) := \int_X f\,d\lambda$ è un funzionale lineare e limitato su $L^2(\varphi)$. È lineare perché lo è l'integrale e limitato per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, come abbiamo appena visto. Ricordando che $L^2(\varphi)$ è uno spazio di Hilbert, il Teorema di Rappresentazione di Riesz per gli spazi di Hilbert ci dice che esiste una funzione $g \in L^2(\varphi)$ tale che $T(f) = \int_X fg\,d\varphi$, cioè

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\varphi, \quad \forall f \in L^2(\varphi). \tag{3.8}$$

Osservazione 3.3.9. *$g \in L^2(\varphi)$ significa che g è determinata quasi ovunque.*

Nella (3.8) poniamo $f = \chi_E$ per ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(E) > 0$. Il primo membro della (3.8) è perciò $\lambda(E)$ e, poiché $0 \leq \lambda \leq \varphi$, si ha

$$\varphi(E) \geq \lambda(E) = \int_X \chi_E g\,d\varphi = \int_E g\,d\varphi,$$

e dunque

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\,d\varphi \leq 1.$$

Poiché ciò è vero per ogni insieme E tale che $\varphi(E) > 0$, questo implica che $g(x) \in [0,1]$ quasi per ogni x. Possiamo allora supporre che $0 \leq g(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$ senza alterare la (3.8), che riscriveremo nella forma

$$\int_X (1-g)\,f\,d\lambda = \int_X fg\,d\mu, \quad \forall f \in L^2(\varphi). \tag{3.9}$$

Poniamo adesso

$$A := \{x \mid 0 \leq g(x) < 1\} \quad \text{e} \quad B := \{x \mid g(x) = 1\}, \tag{3.10}$$

e definiamo

$$\lambda_a(E) := \lambda(A \cap E), \; \lambda_s(E) := \lambda(B \cap E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Osservazione 3.3.10. $\lambda_a(A \cap E) = \lambda(A \cap (A \cap E)) = \lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$ *e lo stesso vale per* λ_s*, cioè* λ_a *è concentrato su* A *e* λ_s *lo è su* B*. Quindi* $\lambda_a \perp \lambda_s$*.*

Se nella (3.9) prendiamo $f = \chi_B$ otteniamo

$$\mu(B) = \int_X \chi_B g \, d\mu = \int_B (1-g)\, d\lambda = 0,$$

in quanto $(1-g)|_B \equiv 0$. Questo porta a concludere che $\lambda_s \perp \mu$. Infatti, dato $E \in \mathcal{M}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E \cap X) = \mu(E \cap (A \cup B)) \\ &= \mu((E \cap A) \cup (E \cap B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B),\end{aligned}$$

in quanto A e B sono disgiunti. Ora, $\mu(E \cap B) = \mu(B) - \mu(E^c \cap B)$ perché $\{E \cap B, E^c \cap B\}$ è una partizione di B. Allora $\mu(E \cap B) = -\mu(E^c \cap B)$, ma sia $\mu(E \cap B)$ che $\mu(E^c \cap B)$ sono ≥ 0 perché μ è positiva. Concludiamo che sono entrambe $= 0$. Questo vuol dire che per ogni $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \mu(A \cap E)$, cioè che μ è concentrata su A. Poiché λ_s è concentrata su B, per definizione abbiamo che $\mu \perp \lambda_s$.
Essendo g limitata, la (3.9) sussiste quando sostituisco la f con la funzione $(1 + g + \ldots + g^n)\chi_E$ perché per ogni $n \geq 1$ ed $E \in \mathcal{M}$ questa funzione appartiene ad $L^2(\varphi)$. Infatti

$$\|1\|_{L^2(\varphi)} = \sqrt{\varphi(X)} < +\infty \quad \text{e} \quad 0 \leq g^n \leq g \leq 1, \; \forall n, \text{ dove } g \in L^2(\varphi).$$

Otteniamo così

$$\int_E \left(1 - g^{n+1}\right) d\lambda = \int_E g(1 + g + \ldots + g^n)\, d\mu. \tag{3.11}$$

In ogni punto x di B, $g(x) = 1$ e quindi $1 - g^{n+1}(x) = 0$. In ogni x punto di A, $g^{n+1}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ in modo monotòno. Pertanto

$$\int_E \left(1 - g^{n+1}\right) d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(A \cap E) = \lambda_a(E).$$

L'integrando a secondo membro della (3.11) cresce in modo monotòno ad un limite h misurabile non negativo , dunque il Teorema della convergenza monotòna mostra che l'integrale tende ad $\int_E h \, d\mu$ per $n \to +\infty$. Abbiamo così dimostrato che vale la (3.7) per ogni $E \in \mathcal{M}$. Preso $E = X$ si vede che $h \in L^1(\mu)$ in quanto $\lambda_a(X) < +\infty$. Infine la (3.7) mostra che $\lambda_a \ll \mu$ e la dimostrazione è così completata. $\square$

3.4 Estensioni del Teorema 3.3.5

La dimostrazione del Teorema 3.3.5 dipende fortemente dall'ipotesi che $\varphi(X) < +\infty$, cioè dalla condizione che λ e μ siano misure limitate. In questa sottosezione adatteremo la dimostrazione del Teorema a delle ipotesi meno restrittive.

Definizione 3.4.1. *Una misura positiva μ su uno spazio topologico X si dice σ-finita se X si può scrivere come unione di una famiglia numerabile di insiemi $X_n \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n$.*

Osservazione 3.4.2. *Una misura (positiva) finita è sempre σ-finita, ma non è vero il viceversa. Grazie a questa proprietà possiamo ampliare il campo di applicazione del Teorema.*

Se μ è σ-finita, possiamo supporre che gli elementi X_n della famiglia descritta nella Definizione 3.4.1 siano disgiunti. Infatti, se non lo fossero potremmo sostituire $\{X_n\}$ con $\{Y_n\}$ dove

$$Y_1 = X_1 \quad \text{ed} \quad Y_n = X_n \setminus (Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-1}), \quad \forall n \geq 2.$$

Ora, se $\lambda(X) < +\infty$ possiamo applicare il Teorema 3.3.5 ad ogni X_n. Le decomposizioni di Lebesgue $\lambda_a^{(n)}, \lambda_s^{(n)}$ delle misure $\lambda^{(n)}$ definite da

$$\lambda^{(n)}(E) = \lambda(E \cap X_n), \quad \forall n \geq 1,$$

se sommate danno luogo ad una decomposizione di Lebesgue di λ. Detto in altri termini, ricordando che avevamo definito

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

dove A era un opportuno insieme che dipendeva dalla misura λ considerata. Allora per ogni n è definito un insieme A_n tale che

$$\lambda_a^{(n)}(E) = \lambda^{(n)}(A_n \cap E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Sia $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. Possiamo allora supporre che $A_n = A \cap X_n$ perché senza perdere di generalità possiamo porre $g_n(x) = 0$ per ogni $x \notin X_n$, dove g_n è la funzione che definisce A_n nella (3.10). Infatti ciò non altera la (3.8). In tal modo otteniamo delle funzioni h_n su X_n, che pensiamo estese a tutto X ponendole 0 su $X \setminus X_n$, tali che $\lambda_a^{(n)}(E) = \int_E h_n \, d\mu$. Queste funzioni definiscono una funzione misurabile non negativa (perché tutte le h_n lo sono) h su X mediante la $h(x) = h_n(x)$, $\forall x \in X_n$, che si può scrivere anche come

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^1(\mu)} &= \int_X |h|\ d\mu = \int_X h\ d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} h_n\right)\ d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X h_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_a^{(n)}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{(n)}(A_n \cap X) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left((A_n \cap X) \cap X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left(A_n \cap X_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left((A \cap X_n) \cap X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left(A \cap X_n\right) \\
&= \lambda(A) \leq \lambda(X) < +\infty\ ,
\end{aligned}$$

cioè $h \in L^1(\mu)$. In particolare si vede che $\lambda_a(X) = \int_X h\ d\mu$, in quanto

$$\begin{aligned}
\lambda_a(X) = \lambda_a\left(\cup_{n=1}^{+\infty} X_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_a(X_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_a(X \cap X_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_a^{(n)}(X) = \int_X h\ d\mu.
\end{aligned}$$

Successivamente, se manteniamo μ σ-finita, possiamo scrivere ogni misura complessa λ su $\mathcal{M}$ nella forma $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ con λ_1 e λ_2 reali, ed applicare quindi il risultato precedente alle variazioni positive e negative di λ_1 e λ_2, che per quanto detto precedentemente (si veda la Definizione 3.1.12), sono misure positive limitate. Si scrive cioè $\lambda = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-$ e si determinano quattro funzioni $h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^- \in L^1(\mu)$ tali che

$$\lambda_{i_a}^+ = \int_X h_i^+\ d\mu, \quad \lambda_{i_a}^- = \int_X h_i^-\ d\mu, \quad i = 1, 2.$$

A questo punto basta definire h come $\left(h_1^+ - h_1^-\right) + i\left(h_2^+ - h_2^-\right)$ poiché in tal modo h verifica la (3.7) ed appartiene ad $L^1(\mu)$.
Riassumendo, possiamo affermare che:

Il teorema di decomposizione di Lebesgue ed il Teorema di Radon-Nikodym sono validi se μ è una misura positiva σ-finita su $\mathcal{M}$ e se λ è una misura complessa su $\mathcal{M}$.

3.5 Conseguenze del Teorema di Radon-Nikodym

Teorema 3.5.1. *Se μ è una misura complessa su una σ-algebra $\mathcal{M}$ in X, allora esiste una funzione h con $|h(x)| = 1$, $\forall x \in X$, tale che*

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu|\,,\ \forall E \in \mathcal{M},\ \text{cioè}\ d\mu = hd|\mu|\,. \tag{3.12}$$

Definizione 3.5.2. *La* (3.12) *è detta rappresentazione o decomposizione polare di* μ *(in analogia con la rappresentazione polare di un numero complesso:* $z = |z|\, e^{i\theta}$*).*

Per poter dimostrare questo teorema avremo bisogno di un lemma.

Lemma 3.5.3. *Siano* μ *una misura positiva su uno spazio topologico* X *tale che* $\mu(X) < +\infty$, $f \in L^1(\mu)$ *ed* S *un insieme chiuso nel piano complesso e supponiamo infine che le medie*

$$M_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu$$

appartengano ad S *per ogni* $E \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(E) > 0$. *Allora* $f(x) \in S$ *quasi per tutti gli* $x \in X$.

Osservazione 3.5.4. $f \in L^1(\mu)$ *vuol dire che* $\int_X |f|\, d\mu \in \mathbb{R}$ *ed è* $< +\infty$, *ma in generale* f *è a valori in* $\mathbb{C}$, *quindi* $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in \mathbb{C}$ *e non ad* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia D un disco circolare chiuso con centro $\alpha \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$ tale che $D \subseteq S^c$ (questo disco esiste perché S^c è un insieme aperto). Poiché posso scrivere S^c come unione numerabile di tali dischi è sufficiente provare che $\mu(E) = 0$, dove $E = f^{-1}(D)$ perché ciò implica che $\mu\left(f^{-1}(S^c)\right) = 0$, in quanto

$$\begin{aligned} 0 &\le \mu\left(f^{-1}(S^c)\right) = \mu\left(f^{-1}(\cup_{i\ge1} D_i)\right) \\ &= \mu\left(\cup_{i\ge1} f^{-1}(D_i)\right) \le \sum_{i\ge1} \mu\left(f^{-1}(D_i)\right) = 0. \end{aligned}$$

Ma $\mu\left(f^{-1}(S^c)\right) = 0$ significa che l'insieme degli $x \in X$ che non vengono mandati in S da f ha misura nulla, cioè $f(x) \in S$ per quasi ogni $x \in X$. Supponiamo allora per assurdo che sia $\mu(E) > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |M_E(f) - \alpha| &= \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu - \alpha \frac{1}{\mu(E)} \int_E 1\, d\mu \right| \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f - \alpha)\, d\mu \right| \\ &\le \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha|\, d\mu \le r, \end{aligned}$$

per come abbiamo costruito E. Ciò vuol dire che $M_E(f)$ dista da α al massimo r, cioè $M_E(f) \in D \subseteq S^c$, che è assurdo perché per ipotesi abbiamo supposto $\mu(E) > 0$ e quindi $M_E(f)$ deve appartenere ad S.
Quindi $\mu(E) = 0$ e la dimostrazione è terminata. $\square$

Dimostriamo adesso il teorema.

Dimostrazione. Banalmente vale che $\mu \ll |\mu|$. Infatti

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0,$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$. Inoltre sappiamo già che $|\mu|(X) < +\infty$. Quindi per il Teorema di Radon-Nikodym (esteso) esiste almeno una $h \in L^1(|\mu|)$ che soddisfi la (3.12). Prendiamo una tale h e deformiamola in modo che $|h(x)| = 1$ per ogni $x \in X$. Sia $A_r := \{x \mid |h(x)| < r\}$, dove r è un numero positivo e sia $\{E_j\}$ una partizione di A_r. Si ha che

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h d|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r).$$

Ciò vale per ogni partizione $\{E_j\}$ quindi, passando all'estremo superiore, otteniamo che $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$ per ogni $r > 0$. Scegliendo un qualunque r che sia anche < 1 otteniamo che $|\mu|(A_r) = 0$. Questo vuol dire che $|h|$ è ≥ 1 quasi ovunque. D'altra parte, se $E \in \mathcal{M}$ è tale che $|\mu|(E) > 0$, allora la (3.12) mostra che

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Quindi applicando il Lemma 3.5.3 con $S =$ disco unitario chiuso centrato in O si conclude che $h(x) \in S$ quasi per ogni $x \in X$, cioè $|h(x)| \leq 1$ quasi ovunque. Quindi $|h| = 1$ quasi ovunque. Sia $B = \{x \in X \mid |h(x)| \neq 1\}$, per quanto appena detto $|\mu|(B) = 0$. Ridefinendo h su B in modo che sia $h(x) = 1$ su B otteniamo una funzione avente tutte le proprietà richieste. $\square$

Teorema 3.5.5. *Sia μ una misura positiva su una σ-algebra $\mathcal{M}$ e, per $g \in L^1(\mu)$, poniamo*

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

(cioè $d\lambda = g d\mu$).
Risulta allora che

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| \, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

(cioè che $d|\lambda| = |g| \, d\mu$).

Dimostrazione. Per il Teorema 3.5.1 esiste una funzione h tale che $|h| \equiv 1$ e $d\lambda = h d|\lambda|$. Per ipotesi $d\lambda = g d\mu$ e quindi

$$h d|\lambda| = g d\mu, \text{ cioè vale } \int_E h d|\lambda| = \int_E g d\mu, \; \forall E \in \mathcal{M}.$$

Questo implica che $d|\lambda| = \overline{h}gd\mu$. Infatti $\overline{h}h = |h|^2 = 1$ e dunque, dato $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E h d|\lambda| = \int_E g d\mu \quad \Longrightarrow \quad |\lambda|(E) = \int_E 1 d|\lambda| = \int_E \overline{h}h d|\lambda| = \int_E \overline{h}g d\mu,$$

cioè $d|\lambda| = \overline{h}gd\mu$. Ora, essendo $|\lambda| \geq 0$ e $\mu \geq 0$, ne segue che $\overline{h}g \geq 0$ quasi ovunque nella misura μ. Infatti, supponiamo per assurdo che possa esistere un insieme $E \in \mathcal{M}$ di misura $\mu(E) > 0$ tale che $\overline{h}(x)g(x) \notin [0,+\infty)$, per quasi ogni $x \in E$ (a priori $\overline{h}g : X \to \mathbb{C}$). Allora, siccome possiamo supporre che $\mu(E) < +\infty$, si avrebbe

$$[0,+\infty) \ni |\lambda|(E) = \int_E \overline{h}g d\mu.$$

Ma, dal momento che per ogni $E' \subseteq E$ tale che $\mu(E') > 0$, $E' \in \mathcal{M}$, si avrebbe

$$M_{E'}\left(\overline{h}g|_E\right) = \frac{1}{\mu(E')}\int_{E'} \overline{h}g \, d\mu \in [0,+\infty)$$

(che è chiuso), allora dal Lemma 3.5.3 concluderemmo che $\overline{h}(x)g(x) \in [0,+\infty)$, per quasi ogni $x \in E$, che è una contraddizione. Quindi abbiamo

- $\overline{h}g \geq 0$ quasi ovunque, cioè $\overline{h}g = \left|\overline{h}g\right|$ quasi ovunque;
- $\left|\overline{h}g\right|^2 = |g|^2$, da cui si ottiene $\left|\overline{h}g\right| = |g|$.

Ma allora $\overline{h}g = \left|\overline{h}g\right| = |g|$ quasi ovunque in X secondo μ, per cui

$$d|\lambda| = \overline{h}gd\mu = |g| \, d\mu,$$

ovvero

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| \, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

□

3.6 Funzionali Lineari Limitati

Siamo finalmente pronti per fornire uno dei due più importanti risultati dell'elaborato, il Teorema di Rappresentazione di Riesz per gli spazi L^p. Da questo momento ci occuperemo di funzionali lineari non più positivi, ma limitati. Diamo l'enunciato del Teorema.

Teorema 3.6.1. *Siano $1 \leq p < +\infty$ e μ una misura σ-finita positiva su X e sia Φ un funzionale lineare limitato su $L^p(\mu)$. Allora esiste un'unica funzione $g \in L^q(\mu)$, dove q è l'esponente coniugato di p, tale che*

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu, \quad \forall f \in L^p(\mu). \tag{3.13}$$

Inoltre, se Φ *e* g *sono legati dalla* (3.13)*, si ha*

$$\|\Phi\|_{L^p(\mu)\to\mathbb{C}} = \|g\|_q.$$

In altre parole, nelle condizioni sopra indicate, $L^q(\mu) = (L^p(\mu))^*$.

Nel corso della dimostrazione sfrutteremo il Lemma di Fatou, ne ricordiamo al lettore l'enunciato.

Teorema 3.6.2 (Lemma di Fatou). *Se* $f_n : X \to [0, +\infty]$ *è misurabile per ogni intero positivo* n*, allora risulta*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) \, d\mu \le \limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \,. \tag{3.14}$$

Dimostrazione del Teorema di Riesz.

(Unicità): Se g e g' soddisfano entrambe la (3.13), allora $\int_E (g - g') \, d\mu = 0$, per ogni insieme misurabile E di misura finita. Infatti

$$\int_E (g - g') \, d\mu = \int_X \chi_E (g - g') \, d\mu,$$

che ha senso perché $g - g' \in L^q(\mu)$ e $\chi_E \in L^p(\mu)$, per ogni E di misura finita. Quindi per la (3.13) ciò è pari a zero. Ma allora, visto che μ è σ-finita, $X = \cup_{n\ge 0} E_n$ dove gli E_n sono tutti insiemi disgiunti a due a due di misura finita. Segue che

$$\int_X (g - g') \, d\mu = \int_{\cup E_n} (g - g') \, d\mu = \sum_{n\ge 0} \left(\int_{E_n} (g - g') \, d\mu \right) = 0.$$

Quindi $g = g'$ quasi ovunque.

(Esistenza): Cominciamo con l'osservare che se vale la (3.13), allora per la disuguaglianza di Hölder

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_p \le 1} |\Phi(f)| = \sup_{\|f\|_p \le 1} \int_X fg d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q \le \|g\|_q \,.$$

Quindi, se g esiste, si ha $\|\Phi\| \le \|g\|_q$.

Rimangono da provare l'esistenza di g e la disuguaglianza $\|\Phi\| \ge \|g\|_q$. Se $\|\Phi\| = 0$ allora valgono entrambe con $g \equiv 0$. Supponiamo $\|\Phi\| > 0$ e consideriamo preliminarmente il caso $\mu(X) < +\infty$.

Caso $\mu(\mathbf{X}) < +\infty$. Per ogni insieme misurabile $E \subseteq X$ poniamo

$$\lambda(E) := \Phi(\chi_E) \,.$$

Poiché Φ è lineare e poiché $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ quando A e B sono disgiunti, si vede che λ è additiva:

$$\lambda(A \cup B) = \Phi(\chi_{A\cup B}) = \Phi(\chi_A + \chi_B) = \Phi(\chi_A) + \Phi(\chi_B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Per provare l'additività numerabile supponiamo che E sia unione numerabile di insiemi misurabili disgiunti E_i. Poniamo $A_k = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ ed osserviamo che

$$\|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = [\mu(E \setminus A_k)]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

cioè che $\chi_{A_k} \to \chi_E$ in $L^p(\mu)$.
La continuità di Φ, che deriva dalla Proposizione 1.2.5, mostra ora che

$$\lambda(A_k) = \Phi(\chi_{A_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Phi(\chi_E) = \lambda(E).$$

Così λ è una misura complessa. È chiaro che $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$, infatti

$$\|\chi_E\|_p = [\mu(E)]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

che, per le proprietà delle norme, è vero se e soltanto se $\chi_E = 0$ in $L^p(\mu)$. Quindi

$$\lambda(E) = \Phi(\chi_E) = 0.$$

Dunque $\lambda \ll \mu$ ed il Teorema di Radon-Nikodym garantisce l'esistenza di una funzione $g \in L^1(\mu)$ tale che valga

$$\Phi(\chi_E) = \lambda(E) = \int_E g\, d\mu = \int_X \chi_E g\, d\mu, \text{ per ogni insieme misurabile } E \subseteq X. \tag{3.15}$$

Per linearità ne consegue che la formula

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\mu \tag{3.16}$$

vale per ogni funzione f semplice misurabile ed anche per ogni $f \in L^\infty(\mu)$, poiché ogni $f \in L^\infty(\mu)$ è limite uniforme di funzioni semplici f_i. Si osservi che l'uniforme convergenza delle f_i ad f implica che $\|f - f_i\|_p \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, infatti

$$\|f - f_i\|_p = \left(\int_X |f_i - f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_i - f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}},$$

essendo $\mu(X) < +\infty$, mentre $\|f_i - f\|_\infty \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$.
Abbiamo quindi che $\Phi(f_i) \xrightarrow[i\to+\infty]{} \Phi(f)$.
Vogliamo ora concludere che $g \in L^q(\mu)$ e che vale la $(\geq)$. Conviene distinguere due casi.

p = 1: La (3.15) e la limitatezza di Φ mostrano che vale

$$\begin{aligned}|\Phi(\chi_E)| &= \left|\int_X \chi_E g \, d\mu\right| \\ &= \left|\int_E g \, d\mu\right| \leq \|\Phi\| \|\chi_E\|_1 \\ &= \|\Phi\| \mu(E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.\end{aligned}$$

In particolare, se $\mu(E) > 0$, abbiamo che $\frac{1}{\mu(E)} \int_E g \, d\mu$ appartiene al disco complesso chiuso di centro l'origine e raggio $\|\Phi\|$. Quindi per il Lemma 3.5.3 si ha che anche $g(x)$ vi appartiene per quasi ogni $x \in X$, cioè che $|g| \leq \|\Phi\|$ quasi ovunque, cosicché $\|g\|_q = \|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$.

$1 < p < \infty$: Poiché $g \in L^1(\mu)$ esiste una funzione α che soddisfa entrambe le condizioni $|\alpha| \equiv 1$ e $\alpha g = |g|$. Sia

$$E_n := \{x \mid g(x) \leq n\} \quad \text{e poniamo} \quad f = \chi_{E_n} |g|^{q-1} \alpha.$$

Su E_n, considerando che $(q-1)p = q$, si ha che

$$|f|^p = |g|^{(q-1)p} |\alpha|^p = |g|^q.$$

Per come è definita, $f \in L^\infty(\mu)$ perché $\|f\|_\infty \leq n^{q-1} < +\infty$ e dunque dalla (3.16) segue che

$$\begin{aligned}\int_{E_n} |g|^q \, d\mu &= \int_X \chi_{E_n} |g|^{q-1} |g| \, d\mu = \int_X \chi_{E_n} |g|^{q-1} \alpha g \, d\mu \\ &= \int_X fg \, d\mu = \Phi(f) \leq \|\Phi\| \|f\|_p = \|\Phi\| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\Phi\| \left(\int_X |\chi_{E_n}|^p |g|^{(q-1)p} |\alpha|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\Phi\| \left(\int_X |\chi_{E_n}| |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\| \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Dunque $\left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\Phi\|$ e, elevando ambo i membri alla q, otteniamo che

$$\int_X \chi_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\Phi\|^q, \quad \forall n \geq 1.$$

Se applichiamo a questa disuguaglianza il Teorema della convergenza monotòna otteniamo che $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$, cioè che $g \in L^q(\mu)$ e vale la $(\leq)$. Ne segue che entrambi i membri della (3.16) sono funzioni continue su $L^p(\mu)$. Essi coincidono sul sottoinsieme denso $L^\infty(\mu)$ di $L^p(\mu)$ e quindi, data la continuità, su tutto $L^p(\mu)$.

Ciò completa la dimostrazione nel caso in cui $\mu(X) < +\infty$.

Caso $\mu(\mathbf{X}) = +\infty$. Abbiamo comunque l'ipotesi della σ-finitezza: X si può scrivere come unione numerabile di insiemi X_i disgiunti a due a due che verificano $\mu(X_i) < +\infty$, per ogni $i \geq 1$. Per ogni $k \geq 1$ poniamo $Y_k = X_1 \cup \ldots \cup X_k$. Si osservi che per ogni insieme misurabile $E \subseteq X$ vale la $\|\chi_E f\|_p \leq \|f\|_p$. Dunque l'applicazione $f \mapsto \Phi(\chi_E f)$ è un funzionale lineare su $L^p(\mu)$ di norma al più uguale a $\|\Phi\|$. Ora, per ogni X_i ricadiamo nel caso precedente e dunque esistono delle funzioni $g_i \in L^q(\mu)$ su X (con $g_i|_{X\setminus X_i} \equiv 0$) tali che

$$\Phi(\chi_{X_i} f) = \int_{X_i} f g_i \, d\mu, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

Poniamo $g = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$. La definizione è ben posta in quanto gli X_i sono disgiunti. Siccome per ogni k vale

$$\Phi(\chi_{Y_k} f) = \int_{Y_k} f(g_1 + \ldots + g_k) \, d\mu, \quad \forall f \in L^p(\mu),$$

e poiché, sempre per ogni k, $\mu(Y_k) < +\infty$, allora il caso precedente mostra che vale la

$$\|g_1 + \ldots + g_k\|_q \leq \|\Phi\|, \quad \forall k \geq 1 .$$

Quindi per il Lemma di Fatou abbiamo $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$. La dimostrazione è così terminata.

□

Osservazione 3.6.3. *Tra le ipotesi del Teorema* 3.6.1 *abbiamo inserito* $p < +\infty$. *Questo vuol dire che (se μ è σ-finita) $L^\infty(\mu)$ è il duale di $L^1(\mu)$, ma il teorema non ci dice nulla sul viceversa. Infatti ciò in generale non è vero.*

Consideriamo lo spazio $X = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, dotato della topologia indotta da quella euclidea e della misura di Lebesgue. X è chiaramente uno spazio localmente compatto e di Hausdorff.

Proposizione 3.6.4. *$L^1([a, b])$ non è isomorfo allo spazio duale di $L^\infty([a, b])$.*

Dimostrazione. Mostriamo che esistono funzionali lineari e limitati su $L^\infty([a, b])$ che non sono rappresentati da nessun elemento di $L^1([a, b])$. Per semplicità, sia $[a, b] = [-1, 1]$ e consideriamo il funzionale $\Phi : L^\infty([-1, 1]) \to \mathbb{C}$ definito estendendo con il Teorema di Hahn-Banach la sua restrizione su $\mathcal{C}([-1, 1])$

$$\Phi(f) = f(0), \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1, 1]).$$

Il funzionale Φ è ovviamente lineare e limitato.
Dobbiamo mostrare che non esiste alcuna funzione $g \in L^1([-1,1])$ tale che

$$\Phi(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\ dx, \quad \forall f \in L^\infty([-1,1]).$$

Supponiamo per assurdo che una tale g esista e consideriamo la successione di funzioni $f_n \in L^\infty([-1,1])$ definita, per ogni $n \geq 1$, da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n\,|x|, & \text{se } |x| \leq 1/n, \\ 0, & \text{se } |x| > 1/n, \end{cases} \qquad \forall x \in [-1,1].$$

Le funzioni f_n sono continue in $[-1,1]$ e quindi limitate. Inoltre

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \quad \text{mentre} \quad f_n(0) = 1,\ \forall n,$$

e dunque $f_n(x)\, g(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quasi ovunque in $[-1,1]$. Ora, siccome

$$|f_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1,1],\ \forall n,$$

allora per ogni n si ha $|f_n g| \leq |g| \in L^1([-1,1])$. Utilizzando quindi la definizione di Φ ed il Teorema della convergenza dominata si ha

$$1 = \Phi(f_n) = \int_{-1}^{1} f_n(x)\, g(x)\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

che è assurdo. □

3.7 Il Teorema di Rappresentazione di Riesz

Definizione 3.7.1. *Diremo che una funzione f su uno spazio di Hausdorff X localmente compatto "tende a zero all'infinito" o "è infinitesima all'infinito" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme compatto $K \subseteq X$ tale che*

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \notin K.$$

Denoteremo con $C_0(X)$ la classe di tutte le funzioni continue f su X che tendono a zero all'infinito.

Osservazione 3.7.2. *$C_c(X) \subseteq C_0(X)$ e vale l'uguaglianza se X è compatto.*

Più in generale vale il seguente teorema.

Teorema 3.7.3. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora $C_c(X)$ è denso in $C_0(X)$, dove su entrambi abbiamo posto la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Data $f \in C_0(X)$, esiste un insieme compatto K tale che $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \notin K$ e per il Lemma di Urysohn 2.3.7 esiste una funzione $g \in C_c(X)$ tale che $0 \leq g \leq 1$ e $g|_K \equiv 1$. Poniamo $h = gf$. Quindi $h \in C_c(X)$ e siccome $0 \leq |h| \leq |f|$ e $h|_K \equiv f|_K$, allora $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. □

Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Il Teorema 2.4.1 caratterizza i funzionali lineari positivi su $C_c(X)$. Adesso possiamo passare a quelli limitati Φ su $C_c(X)$, ma poiché $C_c(X)$ è un sottospazio denso di $C_0(X)$, allora ogni Φ siffatto ha una ed una sola estensione ad un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$. Quindi possiamo partire direttamente dallo spazio di Banach $C_0(X)$.

Se μ è una misura complessa, il Teorema 3.5.1 afferma che esiste una funzione di Borel complessa h con $|h| \equiv 1$ e tale che $d\mu = h\, d|\mu|$. È quindi ragionevole definire l'*integrazione rispetto ad una misura complessa* μ mediante la formula

Definizione 3.7.4.
$$\int_X f\, d\mu := \int_X fh\, d|\mu| \,. \tag{3.17}$$

La relazione $\int_X \chi_E\, d\mu = \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{M}$, è chiaramente un caso particolare della (3.17). Pertanto

$$\int_X \chi_E d(\mu + \lambda) = (\mu + \lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E) = \int_X \chi_E h\, d\mu + \int_X \chi_E h\, d\lambda \,,$$

per ogni μ, λ misure complesse su $\mathcal{M}$ e per ogni $E \in \mathcal{M}$. Ciò conduce alla formula di addizione

$$\int_X f\, d(\mu + \lambda) = \int_X f\, d\mu + \int_X f\, d\lambda \,,$$

che vale (per esempio) per ogni funzione f limitata e misurabile.

Definizione 3.7.5. *Chiameremo regolare una misura di Borel complessa μ se $|\mu|$ è regolare nel senso della Definizione* 2.1.7.

Osservazione 3.7.6. *È chiaro che se μ è una misura complessa di Borel su X, allora l'applicazione $f \mapsto \int_X f\, d\mu$ è un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$, la cui norma non supera $|\mu|(X)$. Infatti si ha*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X fh\, d|\mu|\right| \leq \int_X |f|\,|h|\, d|\mu| =\leq \int_X |f|\, d|\mu| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X) \,,$$

dunque è limitato, mentre la linearità è banale. Inoltre, chiamando Φ questo funzionale, si ha

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\Phi(f)| \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|f\|_\infty |\mu|(X) \leq |\mu|(X) \,.$$

Il fatto che tutti i funzionali lineari e limitati su $C_0(X)$ sono ottenuti in questo modo costituisce il contenuto del Teorema di Riesz.

Teorema 3.7.7. *Ad ogni funzionale lineare e limitato Φ su $C_0(X)$, ove X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, corrisponde una ed una sola misura di Borel regolare μ per la quale vale*

$$\Phi(f) = \int_X f\ d\mu, \quad f \in C_0(X)\ . \tag{3.18}$$

Inoltre, se Φ e μ sono legate dalla (3.18)*, risulta*

$$\|\Phi\|_{C_0(X)\to\mathbb{C}} = |\mu|(X)\ . \tag{3.19}$$

Dimostrazione.

(Unicità): Supponiamo che μ sia una misura di Borel complessa regolare su X e che $\int_X f\ d\mu = 0$, $\forall f \in C_0(X)$. Per il Teorema 3.5.1 esiste una funzione di Borel h con $|h| \equiv 1$ tale che $d\mu = h\ d|\mu|$. Per ogni successione $\{f_n\}$ in $C_0(X)$ si ha quindi

$$|\mu|(X) = \int_X \left(\overline{h} - f_n\right) h\ d|\mu| \leq \int_X \left|\overline{h} - f_n\right|\ d|\mu|\ . \tag{3.20}$$

Infatti, per come abbiamo definito μ,

$$\int_X \left(\overline{h} - f_n\right) h\ d|\mu| = \int_X \overline{h}h\ d|\mu| - \int_X f_n h\ d|\mu| = \int_X |h|\ d|\mu| - 0 = |\mu|(X)\,.$$

Poiché $C_c(X)$ è denso in $L^1(|\mu|)$, allora $\{f_n\}$ si può scegliere in modo che l'ultimo termine della (3.20) tenda a zero per $n \to +\infty$. Infatti

$$\left|\overline{h}\right| = |h| = 1\ \Rightarrow \|\overline{h}\|_{L^1(|\mu|)} = |\mu|(X) < +\infty.$$

Quindi $\overline{h} \in L^1(|\mu|)$ e posso prendere $\{f_n\}$ tale che $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{h}$ in $L^1(|\mu|)$. Ma allora $|\mu|(X) = 0$ e dunque $\mu = 0$. Questo prova l'unicità.

(Esistenza): Consideriamo ora un dato funzionale Φ lineare limitato su $C_0(X)$. Si può supporre $\|\Phi\|_{C_0(X)\to\mathbb{C}} = 1$ senza perdere nulla in generalità. Infatti, se $\|\Phi\| = 0$, l'unica misura che soddisfa la (3.18) è $\mu \equiv 0$. Se invece $\|\Phi\| > 0$ considero $\tilde{\Phi} := \Phi/\|\Phi\|$, cioè $\tilde{\Phi}(f) = \frac{1}{\|\Phi\|}\Phi(f)$.

Notazione: Da adesso in poi, per tutto il corso della dimostrazione, scriveremo $\|\Phi\|_{C_0(X)}$ al posto di $\|\Phi\|_{C_0(X)\to\mathbb{C}}$ e faremo lo stesso anche per $L^1(\lambda)$, che introdurremo tra poco.

Procederemo nel modo seguente:
Costruiremo un funzionale lineare positivo Λ su $C_c(X)$ tale che valga

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in C_c(X). \tag{3.21}$$

Una volta ottenuto questo Λ, ad esso verrà associata una misura positiva di Borel λ come nel Teorema 2.4.1. La tesi del Teorema 2.4.1 mostra che λ è regolare se $\lambda(X) < +\infty$. Infatti l'asserto **(d)** di quel teorema vale per tutti gli aperti e per tutti gli insiemi $E \in \mathcal{M}$ tali che $\lambda(E) < +\infty$. Poiché $\mathcal{M}$ contiene la famiglia degli insiemi di Borel $\mathcal{B}$ e λ è monotòna, tale asserto vale per tutti gli elementi E di $\mathcal{B}$. Questo perché, essendo sottoinsiemi di X, sono tali che $\lambda(E) \leq \lambda(X) < +\infty$ in quanto ciò vale per tutti gli $E \in \mathcal{M}$. La **(c)** invece, per costruzione, vale per tutti i sottoinsiemi di X.

Osservazione 3.7.8.

$$\lambda(X) = \sup\{\Lambda f \mid f \prec X\} = \sup\{\Lambda f \mid 0 \leq f \leq 1,\ f \in C_c(X)\},$$

Quindi, siccome tutte le $f \prec X$ sono tali che $f = |f|$ e che $\|f\|_\infty \leq 1$, dalla (3.21) abbiamo

$$\Lambda f = \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty \leq 1,$$

e si ha di fatto che $\lambda(X) \leq 1$, da cui deduciamo che

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\ d\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)}, \quad \forall f \in C_c(X),$$

perché $|f| \geq 0$ e Λ, essendo un funzionale positivo, è tale che $\Lambda(|f|) = |\Lambda(|f|)|$. Dunque Φ è un funzionale lineare su $C_c(X)$ e ivi ha norma al più 1, rispetto alla norma $L^1(\lambda)$. Siccome $C_c(X)$ è denso in $L^1(\lambda)$ allora esiste un'estensione di Φ ad un funzionale lineare su $L^1(\lambda)$ che conserva la norma. Pertanto il Teorema 3.6.1 (caso $p = 1$) fornisce una funzione di Borel g con $|g| \leq 1$, tale che

$$\Phi(f) = \int_X fg\ d\lambda, \quad \forall f \in C_c(X)\,(\subseteq L^1(\lambda)). \tag{3.22}$$

Infatti il Teorema afferma che $g \in L^q(\lambda) = L^\infty(\lambda)$ e dunque $\|g\|_q = \|g\|_\infty$ e che questa norma è uguale a $\|\Phi\|_{L^1(\lambda)}$. Siccome la norma viene conservata nell'estensione, questo vuol dire che

$$\|g\|_\infty = \|\Phi\|_{L^1(\lambda)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |g| \leq 1 \text{ quasi ovunque.}$$

Ambo i membri della (3.22) sono funzionali continui (perché sono limitati, Proposizione 1.2.5) su $C_0(X)$ e $C_c(X)$ è denso in quest'ultimo. Ne deduciamo che la (3.22) vale per tutte le funzioni $f \in C_0(X)$ ed otteniamo la rappresentazione (3.18) con $d\mu = g\ d\lambda$. Inoltre, poiché $\|\Phi\|_{C_0(X)} = 1$, la (3.22) mostra che

$$\int_X |g|\ d\lambda \geq \sup_{\substack{f\in C_0(X)\\ \|f\|_\infty\leq 1}} |\Phi(f)| = \|\Phi\|_{C_0(X)} = 1. \tag{3.23}$$

Infatti,

$$|\Phi(f)| = \left|\int_X fg\ d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,|g|\ d\lambda \leq \int_X |g|\ d\lambda,$$

per ogni $f \in C_0(X)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$.
Ricapitolando, sappiamo che $\lambda(X) \leq 1$ e che $|g| \leq 1$ quasi ovunque (secondo λ): questi due fatti sono compatibili solo se $\lambda(X) = 1$ e $|g| = 1$ quasi ovunque. Infatti

$$1 = \|\Phi\|_{C_0(X)} \leq \int_X |g|\ d\lambda \leq \|g\|_\infty \lambda(X) \leq \|g\|_\infty = \|\Phi\|_{L^1(\lambda)} \leq 1,$$

da cui otteniamo $\int_X |g|\ d\lambda = 1$ e $\lambda(X) = 1$. Ma allora da $|g| \leq 1$ quasi ovunque si ottiene $|g| = 1$ quasi ovunque. Quindi, per il Teorema 3.5.5, $d|\mu| = |g|\ d\lambda = d\lambda$, da cui

$$|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|_{C_0(X)},$$

il che dimostra la (3.19).
Poiché $\lambda(X) = 1$ e $|g| = 1$ quasi ovunque secondo λ, allora $g \in L^1(\lambda)$.Tutto sta quindi nel trovare un funzionale positivo lineare Λ che soddisfi la (3.21). Iniziamo a costruirlo partendo dai valori che dovrà assumere sulle funzioni $f \in C_c^+(X)$, dove quest'ultima è la classe di tutti gli elementi reali e non negativi di $C_c(X)$ (cioè tutte le funzioni di $C_c(X)$ tali che $f = |f|$). Poniamo per definizione

$$\Lambda f := \sup_{\substack{h\in C_c(X)\\ |h|\leq f}} |\Phi(h)|, \quad \forall f \in C_c^+(X). \tag{3.24}$$

Risulta che Λ è ≥ 0 e soddisfa la (3.21). Infatti $|f| = f$, quindi vale la prima disuguaglianza, mentre la seconda segue dalla limitatezza di Φ:

$$|\Phi(h)| \leq \|\Phi\|_{C_0(X)}\|h\|_\infty = \|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty,\ \forall h \in C_c(X) \text{ con } |h| \leq f.$$

Dunque Λ è limitato con norma al più 1. Valgono inoltre le seguenti proprietà:

$$\Lambda(cf) = c\Lambda f, \quad f \in C_c^+(X),\ \forall c \geq 0,$$

grazie alla linearità di Φ, e

$$\Lambda f_1 \leq \Lambda f_2, \quad \forall f_1, f_2 \in C_c^+(X) \text{ tali che } 0 \leq f_1 \leq f_2.$$

Quest'ultima segue dal fatto che

$$|h| \leq f_1 \Rightarrow |h| \leq f_2 \Rightarrow \sup_{|h| \leq f_1} |\Phi(h)| \leq \sup_{|h'| \leq f_2} \left|\Phi\left(h'\right)\right|.$$

Quindi per concludere che Λ è lineare dobbiamo provare che

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g, \quad \forall f, g \in C_c^+(X), \tag{3.25}$$

dopodiché dovremo estendere Λ ad un funzionale lineare su tutto $C_c(X)$.

Fissiamo f e $g \in C_c^+(X)$. Se $\varepsilon > 0$, per la (3.24) esistono due funzioni h_1 ed $h_2 \in C_c(X)$ tali che

$$|h_1| \leq f,\ |h_2| \leq g \quad \text{e} \quad \Lambda f \leq |\Phi(h_1)| + \varepsilon,\ \Lambda g \leq |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Siano α_1, α_2 due numeri complessi di modulo unitario tali che

$$\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|, \text{ per } i = 1, 2.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\Lambda f + \Lambda g &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon \\
&= \alpha_1 \Phi(h_1) + \alpha_2 \Phi(h_2) + 2\varepsilon \\
&= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\
&\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

cosicché nella (3.25) vale la ($\geq$). Le ultime due disuguaglianze sono motivate dal fatto che $\Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)|$, che è un numero reale positivo, quindi $\Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)$ coincide con il proprio valore assoluto. Inoltre, siccome

$$|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \leq |\alpha_1 h_1| + |\alpha_2 h_2| = |h_1| + |h_2| \leq f + g,$$

allora

$$|\Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)| \leq \Lambda(f+g).$$

Successivamente scegliamo $h \in C_c(X)$ tale che $|h| \leq f + g$.
Sia $V = \{x \mid f(x) + g(x) > 0\}$ e poniamo per definizione

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)},\ h_2(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & \text{se } x \in V \\ h_1(x) = h_2(x) = 0, & \text{se } x \notin V \end{cases}$$

Ora, V è aperto e chiaramente h_1 è ivi continua, mentre in V^c è identicamente nulla. Osserviamo che su X si ha $|h_1| \leq |h|$. Prendiamo ora $x_0 \in \partial V$. Poiché $\partial V \subseteq V^c$ e h è continua su tutto X, abbiamo che

$|h_1(x)| \leq |h(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, da cui segue che $h_1 \in C_c(X)$ in quanto, siccome $V = \{x \mid f(x) > 0\} \cup \{x \mid g(x) > 0\}$, si ha $V^c \subseteq (\operatorname{supp} f)^c \cap (\operatorname{supp} g)^c$. Essendo $h_1 + h_2 = h$ e siccome $|h| \leq f + g$, si ha che $|h_1| \leq g$ e $|h_2| \leq g$, da cui

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leq \Lambda f + \Lambda g.$$

Passando all'estremo superiore sulle h con $|h| \leq f + g$, otteniamo $\Lambda(f + g) \leq \Lambda f + \Lambda g$. Questo prova che in (3.25) vale la $(\leq)$ e dunque che Λ è lineare.

Sia ora $f \in C_c(X)$ una funzione reale. Poiché $f = f^+ - f^-$, dove $f^+, f^- \in C_c^+(X)$, è naturale definire

$$\Lambda f = \Lambda f^+ - \Lambda f^-, \quad \forall f \in C_c(X), \ f \text{ reale}.$$

Data invece una generica funzione $f \in C_c(X)$ a valori complessi, si sa che $f = u + iv$ con $u, v \in C_c(X)$, u, v reali e si definisce infine

$$\Lambda f = \Lambda u + i \Lambda v.$$

Le due estensioni del funzionale Λ appena definite conservano la linearità e questo completa la dimostrazione.

$\square$

Capitolo 4

Applicazioni

4.1 Il Teorema di Lax-Milgram

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo il Teorema di Lax-Milgram: un risultato che ha notevoli applicazioni nella teoria delle PDE e che è fondamentale per lo studio del metodo degli elementi finiti in analisi numerica. Come vedremo, il Teorema di rappresentazione di Riesz è alla base della dimostrazione di questo risultato, che è anche conosciuto come Lemma di Lax-Milgram poiché nel 1971 il matematico ceco Ivo Babuška ne fornì una generalizzazione. Prima di iniziare la trattazione abbiamo bisogno di alcune definizioni. Per semplicità considereremo il caso di uno spazio di Hilbert reale.

Definizione 4.1.1. *Sia H uno spazio di Hilbert reale, una forma bilineare a in H si dice*

- *continua, se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$|a(u,h)| \leq M\|u\|_H\|h\|_H, \quad \forall u, h \in H;$$

- *coerciva, se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che*

$$a(h,h) \geq \alpha\|h\|_H^2, \quad \forall h \in H.$$

Definizione 4.1.2. *Siano H uno spazio di Hilbert reale, a una forma bilineare in H ed $F \in H^*$. Chiamiamo problema variazionale astratto il seguente:*

$$\text{trovare } u \in H \text{ tale che } a(u,h) = F(h), \quad \forall h \in H. \tag{4.1}$$

Molti problemi per le equazioni differenziali rientrano in questa classe attraverso la propria riformulazione debole.

Teorema 4.1.3 (Lemma di Lax-Milgram). *Siano H uno spazio di Hilbert ed a una forma bilineare continua e coerciva su H. Allora esiste un'unica soluzione $\tilde{u} \in H$ del problema* (4.1) *e vale inoltre la seguente stima di stabilità:*

$$\|\tilde{u}\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H^*}, \tag{4.2}$$

dove α è la costante di coercività di a.

Osservazione 4.1.4. *Abbiamo chiamato "stima di stabilità" la disuguaglianza* (4.2) *per un motivo ben preciso: il dato nel problema è costituito dal funzionale $F \in H^*$. Siccome per ogni F il teorema garantisce l'esistenza di un'unica soluzione $u_F \in H$, la corrispondenza dato $\mapsto$ soluzione è una funzione da H^* in H.*

Dati ora $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ed $F_1, F_2 \in H^*$ con relative soluzioni $\tilde{u_1}, \tilde{u_2}$, in base alla bilinearità di a abbiamo che, per ogni h,

$$a(\lambda\tilde{u_1} + \mu\tilde{u_2}, h) = \lambda a(\tilde{u_1}, h) + \mu a(\tilde{u_2}, h) = \lambda F_1(h) + \mu F_2(h).$$

Ovvero la soluzione corrispondente ad una combinazione lineare dei dati è la combinazione lineare delle soluzioni. In altre parole la corrispondenza dati-soluzioni è lineare e dunque per il problema (4.1) vale il principio di sovrapposizione. Quindi

$$\|\tilde{u_1} - \tilde{u_2}\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F_1 - F_2\|_{H^*}.$$

La costante $1/\alpha$ è particolarmente importante perché permette di controllare la variazione in norma della soluzione conseguente ad una variazione sui dati. Quindi più elevata sarà la costante di coercività α, maggiore sarà la "stabilità" del problema.

Dimostrazione del Teorema 4.1.3. Dividiamo la dimostrazione in passi successivi.

- *Riscrittura del problema* (4.1).
  Fissato $u \in H$, l'applicazione definita da $h \mapsto a(u, h)$ è lineare e limitata, infatti, essendo a continua, abbiamo

$$|a(u, h)| \leq M\|u\|_H\|h\|_H =: c\|h\|_H, \quad \forall h \in H,$$

mentre la linearità segue banalmente dalla bilinearità di a. Dunque per il Teorema di rappresentazione di Riesz 1.2.6 esiste un unico vettore $v = Au \in H$ tale che

$$a(u, h) = \langle Au, h\rangle_H, \quad \forall h \in H.$$

D'altra parte, siccome anche $F \in H^*$ è lineare e limitata (per definizione) allora, sempre per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico vettore $z \in H$ tale che

$$F(h) = \langle z, h \rangle_H, \quad \forall h \in H,$$

ed inoltre $\|F\|_{H^*} = \|z\|_H$. Dunque il problema (4.1) diventa:

$$\text{trovare } u \in H \text{ tale che } \langle Au, h \rangle_H = \langle z, h \rangle_H, \quad \forall h \in H,$$

che, essendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ definita positiva, è equivalente a trovare $u \in H$ tale che $Au = z$. Dobbiamo quindi studiare l'operatore A: quello che manda la soluzione u del problema (4.1) nel vettore associato ad F dal Teorema di rappresentazione di Riesz. Vogliamo dimostrare che $A : H \to H$ è un isomorfismo (cioè che è lineare, limitato, iniettivo e suriettivo).

- *Linearità e limitatezza di A.*
  La linearità segue dalla bilinearità di a, se infatti $u_1, u_1, h \in H$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), h \rangle_H &= a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, h) = \lambda_1 a(u_1, h) + \lambda_2 a(u_2, h) \\ &= \lambda_1 \langle Au_1, h \rangle_H + \lambda_2 \langle Au_2, h \rangle_H = \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, h \rangle_H,\end{aligned}$$

  e dunque

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2.$$

  La limitatezza segue dalla continuità di a:

$$\|Au\|_H^2 = \langle Au, Au \rangle_H = a(u, Au) \le M\|u\|_H \|Au\|_H, \quad \forall u \in H,$$

  perché se $Au \neq 0$ posso semplificare ed ottenere $\|Au\|_H \le M\|u\|_H$, che banalmente vale anche quando $Au = 0$.

- *A è iniettivo ed ha immagine chiusa.*
  Dalla coercività si ricava che

$$\alpha\|u\|_H^2 \le a(u, u) = \langle Au, u \rangle_H \le \|Au\|_H \|u\|_H,$$

  e dunque $Au = 0$ implica $u = 0$. Quindi $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, cioè A è iniettivo. Osserviamo inoltre che dal calcolo precedente, qualora sia $u \neq 0$, ricaviamo che

$$\|u\|_H \le \frac{1}{\alpha}\|Au\|_H, \tag{4.3}$$

  e banalmente ciò sussiste per $u = 0$.
  Siano ora $\mathrm{Im}(A)$ l'immagine di A ed $\{y_n\}$ una successione in $\mathrm{Im}(A)$ convergente ad un vettore $y \in H$. Mostriamo che $y \in \mathrm{Im}(A)$:

Per ogni n, siccome $y_n \in \mathrm{Im}\,(A)$, allora esiste un vettore $u_n \in H$ tale che $y_n = Au_n$ e dunque, per la (4.3),

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|_H, \quad \forall n, m \geq 0. \tag{4.4}$$

Ma $\{y_n\}$ è convergente, dunque è di cauchy. Quindi per la (4.4) anche $\{u_n\}$ lo è. Essendo H di hilbert, quindi completo, ne deduciamo che $\{u_n\}$ converge ad un limite $u \in H$. Questo comporta, per la continuità di A (che deriva dalla Proposizione 1.2.5), che $y_n = Au_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Au$.

Osservazione 4.1.5. *H è uno spazio dotato di una norma, la quale induce una metrica su H, dunque dalla topologia sappiamo che è di Hausdorff e che quindi su di H vale il Teorema di unicità del limite.*

Allora per l'unicità del limite abbiamo infine che $y = Au \in \mathrm{Im}\,(A)$, dunque $\mathrm{Im}\,(A)$ è chiuso.

- *A è suriettivo, cioè Im $(A) = H$.*
  Se per assurdo $\mathrm{Im}\,(A)$ fosse contenuto strettamente in H, essendo $\mathrm{Im}\,(A)$ chiuso, per il Teorema della Proiezione esisterebbe un elemento $0 \neq z \in \mathrm{Im}\,(A)^{\perp}$. In particolare avremmo

$$0 = \langle Az, z\rangle_H = a\,(z, z) \geq \alpha\|z\|_H^2 \quad \Rightarrow \quad z = 0,$$

  che è una contraddizione.

- *Esistenza ed unicità della soluzione del problema* (4.1).
  Poiché A è iniettivo e suriettivo esiste un unico $\tilde{u} \in H$ tale che $A\tilde{u} = z$ e visto che anche z è unica, vale l'unicità di $\tilde{u}$ come soluzione del problema.

- *Stima di stabilità.*
  Dalla (4.3), con $u = \tilde{u}$ ricaviamo

$$\|\tilde{u}\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|A\tilde{u}\|_H = \frac{1}{\alpha}\|z\|_H = \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H^*}.$$

□

Osservazione 4.1.6. *Se a è simmetrica e coerciva, allora definisce in H un prodotto scalare. In tal caso esistenza ed unicità per il problema* (4.1) *seguono direttamente dal Teorema di rappresentazione di Riesz.*

Bibliografia

[1] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987

[2] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis - Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005

[3] Marco Abate, *Geometria*, McGraw-Hill Education, 1996

[4] S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, *Invito alle Equazioni a Derivate Parziali*, Springer-Verlag Italia, Milano 2009